15.06.2015 г. доц. д-р Марин Маринов

Резюме на монографичен труд на тема „Нелинейни параболични уравнения "

1 Общо представяне на монографията

1.1 Актуалност

Изучаването на нелинейни уравнения с частни производни, вече повече от 50 години остава актуално поле на изследване за много учени. Причината за това може да бъде видяна във факта, че редица явления от механиката, физиката, биологията, техниката и др. се описват със задачи за нелинейни частни диференциални уравнения. Така например изучаването на явления, базиращи се на общите закони за запазване на масата и енергията естествено води до нелинейни параболични уравнения. Това обяснява множеството изследвания на нелинейните параболични уравнения както в математиката, така и в механиката, и физиката (Вж. монографиите на О. А. Ладиженская и др. [92], D. Gilbard, N. Trudinger [43], А. А. Самарски и др. [111] и Ж. Л. Лионс [93] и цитираната там литература). Едновременно с това, развитието на науката и техниката поставят и нови задачи пред теорията на диференциалните уравнения. Пример за това е навлизането на материали, състоящи се от редуващи се обеми от вещества с различни характеристики. Типични представители са композитните материали, перфорираните материали, дисперсните среди. Именно в такива случаи, когато смесването на различни вещества не е на молекулно равнище, но линейните размери на еднородните частици са пренебрежимо малки спрямо размерите на тялото, възниква следният феномен. Характеристиките на тялото, наричани усреднени, се *различават* от характеристиките на частиците, от които то е съставено. Например появата и разпространяването на пукнатини в композитния материал става по различен начин от този на материалите, от които той е съставен. Също така физическите характеристики като топлопроводимост, електропроводимост и др. в дисперсната среда са различни от съответните характеристики на отделните фази на средата. Това довежда до разработване на различни методи за намиране на усреднените (ефективните) характеристики на дисперсната среда с помощта на характеристиките на отделните фази. Голяма част от тези методи са представени в монографиите A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, „Asympttotic analysis for periodic structure "[15]; Э. Санчес-Паленсия, „Неоднородные среды и теория колебаний "[112]; Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, „Осреднение процессов в периодических средах "[75]; В. В. Жиков, С. М. Козлов, А. О. Олейник, „Усреднение дифференциальных операторов "[84]; A. Pankov, „G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators

“[57]; А. Олейник, Г. А. Йосифьян, А. С. Шумаев, „Математические задачи теории сильно неоднородних упругих сред “[107]. Най-общо математическите модели се описват с диференциални уравнения $P_\epsilon(u_\epsilon) = 0$, чиито коефициенти $a\left(\frac{t}{\epsilon^\mu}, \frac{x}{\epsilon}, \zeta\right)$ са бързо осцилиращи функции (където $0 < \epsilon = \frac{l}{L} \ll 1$, l е размерът на еднородните частици, L е размерът на тялото, $a(\tau, y, \zeta)$ е периодична функция по променливите τ и y.) Усреднената физическа характеристика се описва от функцията $u(t, x) = \lim_{\epsilon \to 0} u_\epsilon(t, x)$ и е решение на диференциалното уравнение $P(u) = 0$, което се нарича *усреднено уравнение*, а неговите коефициенти – *ефективни коефиценти*. В общия случай решаването на уравненията $P_\epsilon(u_\epsilon) = 0$ е изключително сложно. Поради това намирането на $u(t, x)$ като граница на $u_\epsilon(t, x)$ е трудно и се търсят различни методи за намиране на оператора $P(u)$ с помощта на операторите $P_\epsilon(u)$. Това дава възможност да се намери усреднената характеристика $u(t, x)$, като се реши намереното уравнение $P(u) = 0$.

В работите на S. Spagnolo [63,64,65, 62], E. De Giorgi, S. Spagnolo [19] и работите на O. A. Олейник и др. [80, 81, 82, 84, 107] е развит такъв метод, когато $P_\epsilon(u)$ *са линейни оператори*. Този метод се основава на понятието $G-$сходимост, което от своя страна има самостоятелен математически интерес и е приложимо при решаване на редица задачи (Вж. E. De Giorgi [20], [21] и C. Sbordone [61]).

В редица научни изследвания във физиката и механиката от петдесетте години на миналия век се представят отделни частни резултати за уравненията на филтрацията и нелинейните уравнения на топлопроводимостта. Фактът, че тези уравнения описват нелинейни процеси води до отсъствието на принципа на суперпозицията, а оттам – към голямо разнообразие на възможното развитие на еволюционния процес. Нещо повече, в хода на самата еволюция може да настъпи самоорганизация на самата среда и като следствие да се пораждат неочаквани ефекти. Това може да обясни факта, че при анализа на пространствено-времевата структура на решенията на нелинейните израждащи се параболични уравнения на математическата физика много често се използва конкретния, специфичен вид на уравнението. Независимо от големия брой статии и монографии в това направление (Вж. [92], [93], [111], [89], [43] и цитираната там литература), теорията е далеч от своето изчерпване, поради което много математици работят в това направление.

1.2 Цел и задачи

Целта на монографията е да се изследват решенията на нелинейните параболични уравнения, когато:

- уравнението е периодично спрямо времевата и пространствените променливи
- уравнението има израждане

За реализирането на тази цел, се поставят следните задачи:

- Да се развие теория на G-сходимостта за нелинейни параболични оператори
- Да се намерят усреднените уравнения и да се докажат формулите за изчисляване на ефективните коефициенти за нелинейните параболични уравнения

- За уравнението на филтрацията да се изследват нелинейните свойства: крайна скорост на вълната и поява на лакуна
- Да се изследва връзката между регуляризиращия ефект на параболичните уравнения и пространствено-времевата структура на техните решенията
- Да се изследва времето на съществуване на решението на задачата на Коши в зависимост от поведението на началното условие

1.3 Структура на монографичния труд

Монографията се състои от увод, две част, девет глави, 41 параграфа и литература. Представена е във формата на текст с общ обем от 266 страници. Литературата съдържа 115 източника, от които 71 източника на латиница и 44 на руски език.

1) В *първата* част на монографията, която включва глави от 1 до 4, са решени първите две от поставените задачи. В глави 1 и 2 е *изградената теория на G-сходимостта на нелинейните параболични оператори.* В глава 3, с помощта на доказаните теореми за G-сходимост, е решена задачата за *усредняване на нелинейни параболични уравнения от произволен ред* с монотонна елиптична част. Развитият в глави 1, 2 и 3 метод съществено използва монотонността на елиптичната част на операторите и не е приложим към израждащи се нелинейни уравнения. В глава 4 е решена задачата за усредняване на нелинейните израждащи се уравнения от типа на нестационарната филтрация с друг метод, който се основава на енергитични оценки.

2) Във *втората* част на монографията са решени останалите три задачи. Изследвани са нелинейни параболични уравнения, включващи уравненията на филтрацията и нелинейната топлопроводност. Доказани са такива важни свойства на техните решения като:

- регуляризиращ ефект
- поточкова оценка
- принципи за сравняване
- $L^\infty - L^1$-оценка
- крайна скорост на разпространение на топлинната вълна
- поява на лакуна

Изследвана е зависимостта на времето на съществуване на решението на задачата на Коши от поведението на началното условие. За уравнението на филтрацията е доказано точно необходимо условие за съществуване на решение до време T, а за полулинейното уравнение на топлопроводността е оценено времето на съществуване.

2 Кратко изложение на съдържанието на монографията

Ще представим основните резултати, доказани в монографията, като означенията, номерацията на дефинициите, теоремите, формулите и литературата запазват номерацията от монографията.

2.1 Глава 1. G-сходимост на абстрактни параболични оператори

В глава 1 се изучават параболични оператори от вида $\mathcal{P}(u) = \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u)$, където $\mathcal{A}(u)$ е монотонен оператор. Дефинира се G-сходимост на редица от такива оператори. Намерени са достатъчно общи условия за G-компактност на множества от оператори и е характеризиран G-граничния оператор.

Означаваме с V произволно рефлексивно, сепарабелно, банахово пространство с норма $|\cdot|_V$, V' е неговото спрегнато и H е такова хилбертово пространство със скаларно произведение $(\cdot,\cdot)$, че съществуват линейни оператори на вложение $j : V \to H$ и $\widetilde{j} : H \to V'$ със следните свойства:
(i) $j(V)$ е плътно в H и $\widetilde{j}(H)$ е плътно във V';
(ii) $\|j\| \leq 1$, $\|\widetilde{j}\| \leq 1$ и $\langle \widetilde{j}(j(u)), v\rangle_V = (j(u), j(v))$, $\forall\ u \in V$, $\forall\ v \in V$;
(iii) вложението j е компактно.
За да формулираме основния резултат ще използваме още следните означения:
$\langle f, u\rangle = \langle f, u\rangle_V, \quad \forall\ f \in V', \forall u \in V$;
$\mathcal{V} = L^p(0, T; V)$ с норма $\|u\| = |u|_{L^p(0,T;V)}$;
$\mathcal{V}' = L^{p'}(0, T; V')$ с норма $\|f\|_* = |f|_{L^p(0,T;V')}$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$;
$\|u\|_\tau = \left(\int_0^\tau |u(t)|_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_{*\tau} = \left(\int_0^\tau |f(t)|_{V'}^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}$;
$[f, u]_{s\tau} = \int_s^\tau \langle f(t), u(t)\rangle dt$, $[f, u] = [f, u]_{0T}$;
$\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$ с норма $\|u\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_0^T |u(t)|_H^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$;
$\mathcal{W} = \left\{u(t) \in \mathcal{V}\ :\ \frac{du}{dt} \in \mathcal{V}'\right\}$ с норма $\|u\|_0 = \|u\| + \|\frac{du}{dt}\|_*$;
$\mathcal{W}_0 = \{u(t)\ :\ u \in \mathcal{W}$ и $u(0) = 0\}$;
$x_n \xrightarrow{X} x$ означава, че редицата $\{x_n\}$ има граница x в слабата топология на банаховото простронство X.

Дефиниция 1. Ще казваме, че редицата от параболични оператори $\mathcal{P}_k : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{V}'$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, е $G-$ *сходяща* при $k \to \infty$ към параболичния оператор $\mathcal{P} : \mathcal{W}_0 \to \mathcal{V}'$, когато

$$\mathcal{P}_k^{-1}(f) \xrightarrow{\mathcal{W}_0} \mathcal{P}^{-1}(f), \qquad \forall\ f \in \mathcal{V}' \text{ при } k \to\ \infty.$$

Когато това е на лице ще използваме означението

$$\mathcal{P}_k \xrightarrow{G} \mathcal{P}$$

и операторът $\mathcal{P}$ ще наричаме G-граница на редицата $\{\mathcal{P}_k\}$.

Основни условия.

$\mathcal{H}1$ *(Ограниченост).* Съществуват монотонно растяща непрекъсната функция $\lambda_1(s)$ и $C_1 = const. \geq 0$ такива, че $\|\mathcal{A}(u)\|_* \leq \lambda_1(\|u\|) + C_1,\ \forall u \in \mathcal{V}$.

$\mathcal{H}2$ *(Коерцитивност).* Съществува неотрицателна непрекъсната, монотонно растяща функция $\lambda_2(s)$ и $C_2 = const. \geq 0$ такива, че: $[\mathcal{A}(u), u] \geq \lambda_2(\|u\|)\|u\| - C_2$, $\forall\ u \in \mathcal{V}$ и $\lim_{s\to\infty} \lambda_2(s) = \infty$.

$\mathcal{H}3$ *(Дефинитност на вариацията).* Съществува неотрицателна функция $\mu_1(s_1, s_2)$, монотонно растяща по всяка от променливите и такава, че:
(i) $\mu_1(s_1, s_2) = 0 \iff s_2 = 0$,
(ii) $[\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v] \geq \mu_1(r, \|u - v\|')$, $\forall\ u \in \mathcal{V}$, $\forall\ v \in \mathcal{V}$,
където $r = \max\{\|u\|, \|v\|\}$, нормата $\|\cdot\|'$ е компактна по отношение на нормата $\|\cdot\|_0$ и непрекъсната по отношение на нормата $\|\cdot\|$.

$\mathcal{H}3'$. Съществува монотонно растяща, непрекъсната и неотрицателна функция $\mu(s)$ такава, че:
(i) $\mu(s) = 0 \iff s = 0$,
(ii) $[\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v] \geq \mu(\|u - v\|)\|u - v\|$, $\forall\ u \in \mathcal{V}$ и $\forall\ v \in \mathcal{V}$.

$\mathcal{H}4$ *(Непрекъснатост).* Съществува такава непрекъсната, монотонно растяща по всяка променлива функция $\mu_2(s_1, s_2, s_3)$, че:
(i) $\mu_2(s_1, s_2, s_3) = 0 \iff s_3 = 0$,
(ii) $\|\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)\| \leq \mu_2(\|u\|, \|v\|, [\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v])$, $\forall\ u \in \mathcal{V}$ и $\forall\ v \in \mathcal{V}$.

С помощта на формулираните основни условия ще определим класове от параболични оператори, притежаващи свойството G-компактност.

Дефиниция 2. С $\pi = \pi(C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, q)$ ще означаваме класа от абстрактни параболични оператори $\mathcal{P}(u) = \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u)$, за които са в сила условия $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$, $\mathcal{H}4$ и ако $\mathcal{P}(u) = 0$, $u \in \mathcal{W}_0$, то $\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq -q(t)$, където $q(t) \in L^1(0, T)$.

Дефиниция 3. С $D = D(C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \mu_2, q)$ ще означаваме класа от абстрактни параболични оператори $\mathcal{P}(u) = \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u)$, за които са в сила условия $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3'$, $\mathcal{H}4$ и ако $\mathcal{P}(u) = 0$, $u \in \mathcal{W}_0$, то $\langle \mathcal{A}(u), u\rangle \geq -q(t)$, където $q(t) \in L^1(0, T)$.

Ще отбележим, че класът от оператори D се различава от класа π само по това, че вместо условие $\mathcal{H}3$ е изпълнено условие $\mathcal{H}3'$. Освен това, очевидно, че условието $\pi \neq \emptyset$ ($D \neq \emptyset$) налага на параметрите C_1, C_2, λ_1, λ_2, μ, μ_1, μ_2, с които се определят класовете, определени ограничения.

Нека F е оператор, изобразяващ банаховото пространство X в банахово пространство Y. Ще казваме, че F е *равномерно $d-$непрекъснат* върху всяко кълбо от X, когато за всяко кълбо $B \subset X$, $\forall\ \varepsilon > 0$ и $\forall\ f \in Y'$ съществува такова $\delta > 0$, че щом $|x_1 - x_2|_X < \delta$ и $x_i \in B$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$|\langle f, F(x_1) - F(x_2)\rangle_Y| < \varepsilon.$$

Основните резултати в тази глава се представят от следните теореми:

Теорема 2. Нека $\{\mathcal{P}_k\} \subset \pi(C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, q)$. Тогава съществува подредица $\{\mathcal{P}_m\}$ на редицата $\{\mathcal{P}_k\}$ и оператор $\mathcal{F} : \mathcal{V}' \to \mathcal{W}_0$, за които да в сила следните три твърдения.

(а) Операторът $\mathcal{F}$ е равномерно $d-$непрекъснат върху всяко кълбо от $\mathcal{V}'$ и

$$\|\mathcal{F}(f)\|_0 \le \lambda_3(\|f\|_*) + C_3,$$

където $\lambda_3(s) = s + \lambda_2^{-1}(s+1) + \lambda_1(\lambda_2^{-1}(s+1) + C_2)$ и $C_3 = C_1 + C_2$.

(б) За всяко $f \in \mathcal{V}'$ е в сила

$$\mathcal{P}_m^{-1}(f) \xrightarrow{\mathcal{W}_0} \mathcal{F}(f).$$

(в) За всяко $f \in \mathcal{V}'$ е в сила

$$\mathcal{P}_m^{-1}(f) \xrightarrow{C[0,T;H]} \mathcal{F}(f).$$

Теорема 3. Нека редицата $\{\mathcal{P}_k\} \subset \pi(C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, q)$ и функцията $\tau(s) = \frac{1}{s}\lambda_2(\lambda_1^{-1}(s - C_1))\lambda_1^{-1}(s - C_1)$ е непрекъсната и монотонно растяща върху (C_1, ∞).

Тогава съществува подредица $\{\mathcal{P}_m\}$ и параболичен оператор $\mathcal{P}_0(u) = \frac{du}{dt} + \mathcal{A}(u)$ такива, че

$$\mathcal{P}_m \xrightarrow{G} \mathcal{P}_0$$

и $\mathcal{A}$ удовлетворява условията $\mathcal{H}1$, $\mathcal{H}2$, $\mathcal{H}3$ и $\mathcal{H}4$ съответно с параметри $\widetilde{\lambda}_1$, $C_1 + C_2'$; λ_2, C_2; μ_1 и $\widetilde{\mu}_2$, където функциите $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\mu}_2$ се определят от параметрите на класа π.

С доказаните в глава 1 лема 2 и следствия от 1 до 3 е установено, че теорема 3 остава в сила ако $\{\mathcal{P}_k\} \subset D(C_1, C_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \mu_2, q)$.

Резултатите от тази глава са публикувани в статията М. Маринов [101] а съобщение за приложението на теорема 3 при изучаването на нелинейни оператори от втори ред е публикувано в М. Маринов [99]. Тези резултати са реферирани в MR:35114a и MR871:35170 и са цитирани от А. А. Панков в монографията [57],стр. 44.

2.2 Глава 2. G-сходимост на квазилинейни диференциални оператори

В глава 2 се дефинират понятията G-сходимост и силна G-сходимост за квазилинейни параболични диференциални оператори. Изследван е случаят, когато елиптичната част е монотонен оператор.

Означения

С Ω означаваме ограничена област в $\mathbb{R}^n$ с достатъчно гладка граница $\partial\Omega$, а Q е цилиндър с основа Ω, т.е. $Q = (0, T] \times \Omega$, където $0 < T < +\infty$.

В нашите изследвания ще използваме стандартните пространства на Соболев $W^{m,p}(\Omega)$ и $W_0^{m,p}(\Omega)$, т.е.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u(x) : u(x) \in L^p(\Omega) \text{ и } D^\alpha u(x) \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \le m\},$$

където $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ е мултииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ е обобщената производна от ред α.

Известно е, че $W^{m,p}(\Omega)$ е банахово пространство с норма $\|u(x)\|_m = \left(\sum_{|\alpha|\le m} |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$, а пространството $W_0^{m,p}(\Omega)$ е подпространство на $W^{m,p}(\Omega)$, получено като попълнение на $C_0^\infty(\Omega)$ спрямо нормата $\|u\|_m$.

С $W^{-m,p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, означаваме спрегнатото пространство на пространството $W_0^{m,p}(\Omega)$, т.е.

$$W^{-m,p'}(\Omega) = \left\{ f(x) : f(x) = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f_\alpha(x) \text{ и } f_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega) \right\}$$

За да можем да използваме означенията от глава 1 полагаме:
$V = W_0^{m,p}(\Omega)$; $H = L^2(\Omega)$; $V' = W^{-m,p'}(\Omega)$; $p' = \frac{p}{p-1}$; $\mathcal{V} = L^p(0,T;V)$;$\mathcal{H} = L^2(0,T;H) = L^2(Q)$;
$\mathcal{V}' = L^{p'}(0,T;V')$; $\mathcal{W} = \left\{u : u \in \mathcal{V} \text{ и } \frac{du}{dt} \in \mathcal{V}'\right\}$, $\mathcal{W}_0 = \{u \in \mathcal{W} : u(0) = 0 \in V\}$;
$\mathcal{L} = \left\{u : u \in L^p(0,T;W^{m,p}(\Omega)) \text{ и } \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0,T;W^{-m,p'}(\Omega))\right\}$ *и запазваме същите означения за отношенията на дуалност и съответните норми.*

Освен това за краткост ще използваме следните означения:
$D^k u = \{D^\alpha u, |\alpha| = k\}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$; $\partial u = \{u, D^1 u, D^2 u, \ldots, D^m u\}$, $\forall u \in \mathcal{V}$;
m_0 е броят на компонентите на ∂u; $\delta v = \left\{\frac{dv}{dt}, v, D^1 v, \ldots, D^m v\right\}$, $\forall\, v \in \mathcal{L}$.

Изучават се диференциални оператори от вида

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(t,x,u,\partial u), \tag{2}$$

където $u \in \mathcal{W}$, а коефициентите $(a_\alpha(t,x,\zeta) : |\alpha| \le m)$ удовлетворяват основните условия $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ и $(H4)$. При формулировката на тези условия ще използваме означението

$$|\zeta| = \left(\sum_{j=1}^{m_0} \zeta_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{m_0}.$$

Основни условия

H1.
(i) *Условие на Каратеодори.* За всяко α функцията $a_\alpha(t,x,\zeta)$ е:

(а) измерима върху Q за всяко фиксирано ζ;

(б) непрекъсната върху $\mathbb{R}^{m_0}$ за почти всяко $(t,x) \in Q$.

(ii) *Ограниченост.* Съществуват константа $C_1 > 0$ и неотрицателна функция $K_1(t,x) \in L^1(Q)$, такива че:

$$|a_\alpha(t,x,\zeta)|^{p'} \le C_1|\zeta|^p + K_1(t,x) \tag{3}$$

за почти всяко $(t,x) \in Q$ и $\forall\, \zeta \in \mathbb{R}^{m_0}$.

Ще отбележим, че поради свойствата на *оператора суперпозиция* (вж. [91]), условие H1 е напълно естествено, когато разглежданията са в пространствата на Соболев.

H2 (*Коерцитивност*). Съществуват $C_2 = const. > 0$ и неотрицателна функция $K_2(t,x) \in L^1(Q)$ такива, че

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(t,x,\zeta)\zeta_\alpha \geq C_2|\zeta|^p - K_2(t,x),$$

за почти всяко $(t,x) \in Q$ и $\forall\ \zeta = (\zeta_\alpha : |\alpha| \leq m) \in \mathbb{R}^{m_0}$.

H3 (*Дефинитност на вариацията*). Съществува $C_3 = const. > 0$ такава, че

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (a_\alpha(t,x,\zeta) - a_\alpha(t,x,\zeta'))(\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha) \geq C_3|\zeta - \zeta'|^p,$$

за почти всяко $(t,x) \in Q$ и произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$.

H4 (*Непрекъснатост*). Съществуват неотрицателна функция $K_3(t,x) \in L^1(Q)$ и положителни константи C_4 и s, такива, че $0 < s < 1$ и

$$|a_\alpha(t,x,\zeta) - a_\alpha(t,x,\zeta')|^{p'} \leq C_4(K_3(t,x) + |\zeta|^p + |\zeta'|^p)|\zeta - \zeta'|^{p(1-s)},$$

за почти всяко $(t,x) \in Q$, за произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$ и $|\alpha| \leq m$.

Дефиниция 1. Ще казваме, че операторът (2) принадлежи на класа $\Pi(C_1, C_2, C_3, C_4, s, K_1, K_2, K_3)$, ако неговите коефициенти $\{a_\alpha(t,x,\zeta) : |\alpha| \leq m\}$ удовлетворяват условията H1, H2, H3 и H4.

Константите C_1, C_2, C_3, C_4 и s и функциите K_1, K_2 и K_3 ще наричаме параметри на класа Π.

Забележка 1. Ще отбележим, че от условия H1 и H3 следва условие H2, но ние го записваме отделно за да подчертаем, че G-граничния оператор удовлетворява също и условие H2.

Нека сега $\{P_k\}$ е произволна редица от параболични оператори, където

$$P^k(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^k_\alpha(t,x,\partial u), \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

По аналогия с линейния случай (вж [81]) даваме следните дефиниции:

Дефиниция 2. P_k-градиент на функцията $u(t,x)$ се нарича векторът

$$(a^k_\alpha(t,x,\partial u) : |\alpha| \leq m).$$

За удобство се използва означението $\Gamma_\alpha(u, P_k) = a^k_\alpha(t,x,\partial u), \quad |\alpha| \leq m$. Тогава P_k-градиентът се записва $(\Gamma_\alpha(u,P_k), |\alpha| \leq m)$.

Дефиниция 3. Ще казваме че редицата от диференциални оператори $\{P_k\}$ е G-сходяща към параболичния оператор

$$P_0(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a^0_\alpha(t, x, \partial u),$$

когато

$$P_k^{-1}(f) \xrightarrow{\mathcal{W}_0} P_0^{-1}(f), \quad \text{(слабо)}, \quad \forall\ f \in \mathcal{V}',\ k \to \infty.$$

Когато това е на лице ще използваме означението

$$P_k \xrightarrow{G} P_0$$

и оператора P_0 ще наричаме G -граница на редицата $\{P_k\}$.

Дефиниция 4. Ще казваме, че редицата $\{P_k\}$ от параболични оператори е *силно G-сходяща* към параболичния оператор P_0, когато:

(а) $P_k \xrightarrow{G} P_0$;

(б) за всяко $u \in \mathcal{W}_0$ и $|\alpha| \leq m$

$$a^k_\alpha(t, x, \underset{\cdot}{\mathrm{u}}_k) \xrightarrow{L^{p'}(Q)} a^0_\alpha(t, x, \partial u) \text{ (слабо)},$$

където $P_k(u_k) = P_0(u)$ и $u_k \in \mathcal{W}_0$.

Когато това е на лице, ще използваме означението

$$P_k \overset{G}{\Longrightarrow} P_0.$$

Основният резултат в главата е следвана теорема, даваща достатъчно условие за G-компактност:

Теорема 4. Нека редицата $\{P_k\}$ от параболични оператори се съдържа в класа $\Pi(C_1, C_2, C_3, C_4, s, k_1, k_2, k_3)$. Тогава съществуват подредица $\{P_{k'}\}$ и квазилинеен параболичен оператор P такива, че

(i) $P_{k'} \overset{G}{\Longrightarrow} P$

(ii) $P \in \Pi_1(\widetilde{C}_1, C_2, C_3, \widetilde{C}_4, \widetilde{s}, \widetilde{k}_1, K_2, \widetilde{k}_3)$ където $\widetilde{s} = sp(sp - s + 1)^{-1}$, $\widetilde{k}_3 = K_1 + K_2 + K_3$ $\widetilde{k}_1 = \widetilde{C}_1 \widetilde{k}_3$, а константите $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_4$ се определят от параметрите на класа Π.

В тази теорема, освен че се доказва силна G-сходимост към $G-$граничния оператор P и се определя от кой клас е оператора P, се дава *точно описание на неговата структура.* Това прави възможно обобщаването на известното в линейния случай $\mathcal{N}-$условие. Доказаното обобщение се формулира така:

Следствие 1 ($\mathcal{N}-$*условие*). Нека $\{P_k\} \subset \Pi$ и $P_k \overset{G}{\Longrightarrow} P$, където

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(t, x, \partial u)$$

е операторът построен в теорема 4.

Освен това за редицата $\{N^k(t,x,\zeta)\}$, $\zeta=(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^{m_0}$ предполагаме, че са изпълнени следните три условия

(*i*) $\{N^k(\cdot,\cdot,\zeta)\}\subset\mathcal{W}$.

(*ii*) $\frac{\partial N^k}{\partial t}+\sum_{|\alpha|=m}(-1)^m D^\alpha a^k_\alpha(t,x,\eta,\xi+D^m N^k)=f_k(t,x,\zeta)$ и $\lim_{k\to\infty} f_k=0$ силно в $\mathcal{V}'$.

(*iii*) $\lim_{k\to\infty} N^k=0$ слабо в $\mathcal{W}$.

Тогава

$$\lim_{k\to\infty} a^k_\alpha(t,x,\eta,\xi+D^m N^k)=a_\alpha(t,x,\eta,\xi),$$

слабо в $L^{p'}(Q)$, $\forall\ |\alpha|\le m$.

Освен това са доказани следните теореми:

Теорема 5 (локалност на силната G-сходимост). Нека редицата от диференциални оператори $\{P_k\}$ принадлежи на класа Π и $P_k\overset{G}{\Longrightarrow}P$. Тогава за всеки цилиндър $Q_1=(t_1,t_2]\times\Omega_1$, където $0\le t_1<t_2\le T$ и Ω_1 – подобласт на Ω с достатъчно гладка граница е изпълнено

$$P_k\big|_{Q_1}\Longrightarrow P\big|_{Q_1}.$$

Теорема 6 (сходимост на графиките). Нека редицата от параболични диференциални оператори $\{P_k\}$ е от класа Π и

$$P_k\Longrightarrow P.$$

Тогава са в сила следните две твърдения.

(а) Ако редицата $\{u_k\}\subset\mathcal{W}$ е слабо сходяща в $\mathcal{W}$ към $u(t,x)$ и редицата $\{P_k(u_k)\}$ е силно сходяща във $\mathcal{V}'$ към $f(t,x)$, то $P(u)=f$.

(б) Ако $u\in\mathcal{W}_0$ и $P(u)=f$, то съществува редица $\{u_k\}\subset\mathcal{W}_0$ такава, че

$$u_k\xrightarrow{\mathcal{W}}u\ \text{(слабо)}\qquad \text{и}\qquad P_k u_k\xrightarrow{\mathcal{V}'}f,\text{(силно)}.$$

Теорема 7. Нека $u\in\mathcal{L}$, $\{P_k\}\subset\Pi$ и $P_k\overset{G}{\Longrightarrow}P$. Ако функциите $\{u_k\}$ са такива, че $P_k(u_k)=P(u)$ и $u_k-u\in\mathcal{W}_0$, то са в сила следните две твърдения.

(а) Редицата $\{u_k-u\}$ е слабо в $\mathcal{W}$ сходяща към 0.

(б) Редицата $\{\Gamma_\alpha(u_k,P_k)\}$ е слабо в $L^{p'}(Q)$ сходяща към $\Gamma_\alpha(u,P)$.

Резултатите от тази глава са публикувани в статията М. Маринов [102], а кратко съобщение за оператори от втори ред е публикувано в М. Маринов [99]. Тези публикации са цитирани в монографията на A. Pankov [57] на стр. 44 и стр. 212.

За линейни елиптични и параболични оператори от втори ред, понятието G-сходимост е въведено и изследвано от S. Spagnolo [62, 63, [64], [65]. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник и Ха Шьен Нгоьн в [80] и [81] изграждат теорията на G-сходимостта на линейни елиптични и параболични оператори от произволен ред. А. Панков в [108] и У. Райтум в [110] изследват G-сходимостта на квазилинейни елиптични оператори.

В глава 2 са получени следните основни резултати: доказани са основните теореми изграждащи теорията на G-сходимостта на нелинейните параболични оператори (като достатъчно условие за G-компактност, локалност на G-границата, сходимост на графиките, сходимост на произволни решения); развита е техника и са доказани твърдения (теорема 4 и следствие 1), необходими за решаването на задачата за усредняване на нелинейни параболични уравнения от произволен ред, което е предмет на глава 3.

2.3 Глава 3. Усредняване на нелинейни параболични уравнения

В глава 3 е решена задачата за усредняване на нелинейни параболични уравнения от вида

$$(1)_\epsilon \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\epsilon(\epsilon^{-\mu} t, \epsilon^{-r} x, \partial u) = f(t,x),$$

когато $\mu \geq 0$, $r > 0$ и коефициентите $a_\alpha(t, y, \zeta)$ са периодични функции по t и x.

Ние казваме, че $(1)_\epsilon$ допуска усреднение, когато семейството от параболични оператори

$$P_\epsilon(u) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\epsilon(\epsilon^{-\mu} t, \epsilon^{-r} x, \partial u), \ \epsilon > 0$$

е силно G-сходящо към диференциалния оператор $P(u)$. В този случай, коефициентите на $P(u)$ се наричат *ефективни коефициенти.*

В §3.3 е изследван случаят, когато усредняването е по (t,x), а в §3.4 е изследван случаят, когато усредняването е само по x.

За да формулираме основните резултати ще използваме означенията от глава 2, със следните промени.

Ако функцията $v(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k)$ е $Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq y_j \leq l_j, 1 \leq j \leq n\}-$периодична по променливите $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то с $\langle v\rangle_y$ означаваме средната стойност

$$\langle v\rangle_y = \frac{1}{\mathrm{mes}Y} \int\limits_Y v(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k) dy_1 \ldots dy_n.$$

Пространството от измерими Y-периодични функции с крайна норма $\langle |f|^p\rangle^{\frac{1}{p}}$ ще означаваме с $L^p_{\mathrm{per}}(Y)$, т.е. $L^p_{\mathrm{per}}(Y) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \ f \text{ е } Y\text{-периодична}\}$.

Тъй като за нашите разглеждания големините на периодите $l_1, \ldots, l_n$ не са съществени, без ограничение на общността ще считаме, че $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = 1$.

Означаваме с E единичния куб в $\mathbb{R}^n$, т.е. $E = \{y \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq y_j \leq 1 \text{ и } 1 \leq j \leq n\}$. Ще използваме следните пространства от периодични функции:

(*i*) $V_{\mathrm{per}} = \{u(x) \in W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : u(x) \ \text{ е } E\text{-периодична и } \ \langle u\rangle_x = 0\}$ с норма $\|u\|_{\mathrm{per}} = \left(\sum\limits_{|\alpha|=m} \int\limits_E |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. Пространството V_{per} е рефлексивно, сепарабелно, банахово пространство. С V'_{per} означаваме неговото спрегнато пространство.

(ii) С H_{per} означаваме хилбертовото пространство

$H_{\text{per}} = \{u(x) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : \ u(x)$ е E-периодично и $\langle u \rangle_x = 0\}$

със скаларно произведение $(u, v) = \int\limits_E u(x)v(x)dx$

Освен това ще разглеждаме и измерими в $\mathbb{R}^{n+1}$ функции, които са $[0,1] \times E-$периодични. С $\langle f \rangle_{\tau y}$ ще означаваме средната стойност на функцията $f(\tau, y)$, т.е.

$$\langle f \rangle_{\tau y} = \iint\limits_{[0,1]\times E} f(\tau, y) d\tau dy.$$

Когато $\mu > 0$ и $r > 0$, т.е. когато усредняваме по (t, x), ние използваме и следните означения

(i) $\mathcal{E} = [0,1] \times E = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ 0 \leq \tau \leq 1, 0 \leq y_j \leq 1$ и $1 \leq j \leq n\}$;

(ii) $\mathcal{H}_{\text{per}} = \{u(\tau, y) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}) : u(\tau, y)$ е $\mathcal{E}$-периодична и$\langle u \rangle_{\tau y} = 0\}$

и

(iii) $\mathcal{V}_{\text{per}} = \{u(\tau, y) \in L^p_{\text{loc}}(R; V_{\text{per}}) : \ u(\tau, y)$ е $\mathcal{E}$-периодична и $\langle u \rangle_{\tau y} = 0\}$.

Пространството $\mathcal{H}_{\text{per}}$ е хилбертово пространство със скаларно произведение

$$((u(\tau, y), v(\tau, y))) = \iint\limits_{\mathcal{E}} u(\tau, y)v(\tau, y) d\tau dy,$$

а пространството $\mathcal{V}_{\text{per}}$ е рефлексивно, сепарабелно, банахово пространство с норма

$$|||u(\tau, y)||| = \left(\int_0^1 \|u(\tau, \cdot)\|^p_{\text{per}} d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

С $\mathcal{V}'_{\text{per}}$ ще означаваме спрегнатото пространство на $\mathcal{V}_{\text{per}}$. Нормата на $f \in \mathcal{V}'_{\text{per}}$ ще означаваме с $|||f|||_*$.

Освен това ще използваме пространството $\mathcal{W}_{\text{per}} = \left\{ u \in \mathcal{V}_{\text{per}} : \ \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial \tau} \in \mathcal{V}'_{\text{per}} \right\}$ с норма $|||u|||_0 = |||u||| + \left|\left|\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|\right|\right|_*$. Пространството $\mathcal{W}_{\text{per}}$ е рефлексивно, банахово пространство. С $\mathcal{W}'_{\text{per}}$ ще означаваме неговото спрегнато пространство.

За коефициентите на операторите $P_\epsilon(u)$ ще предполагаме, че са в сила следните основни условия:

A.

(i) *Условие на Каратеодори.* За всяко α функцията $a_\alpha(\tau, y, \zeta)$ е:

(а) измерима в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{E}-$периодична за всяко фиксирано $\zeta \in \mathbb{R}^{m_0}$

(б) непрекъсната върху $\mathbb{R}^{m_0}$ за почти всяко $(\tau, y) \in \mathcal{E}$

(ii) *Ограниченост.* Съществуват константи $C_1 > 0$ и $K_1 > 0$ такива, че

$$|a_\alpha(\tau, y, \zeta)|^{p'} \leq C_1 |\zeta|^p + K_1,$$

за почти всяко $(\tau, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и $\forall \ \zeta \in \mathbb{R}^{m_0}$

Б. Съществува константа $C_3 > 0$ такава, че

$$\sum_{|\alpha|\le m} (a_\alpha(\tau, y, \zeta) - a_\alpha(\tau, y, \zeta'))(\zeta_\alpha - \zeta'_\alpha) \ge C_3|\zeta - \zeta'|^p,$$

за почти всяко $(\tau, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и за произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$.

В (*Непрекъснатост*). Съществуват константи $C_4 > 0$ и s такива, че $0 < s < 1$ и

$$|a_\alpha(\tau, y, \zeta) - a_\alpha(\tau, y, \zeta')|^{p'} \le C_4(1 + |\zeta|^p + |\zeta'|^p)^s|\zeta - \zeta'|^{p(1-s)},$$

за почти всяко $(\tau, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, за произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$ и $\forall\ |\alpha| \le m$.

Когато усредняването е едновремнно по пространствените променливи x и по времето t, в §3.3, е установено, че са възможни точно три различни случая при изчисляването на ефективните коефициенти. Заимствайки понятията от линейния случай (вж. [82]), това са:
1) автономния случай, когато $\mu = 2mr$
2) неавтономния случай, когато $0 < \mu < 2mr$ и
3) неавтономния случай, когато $2mr < \mu$.

Доказани са следните основни резултати:

Доказани са следните основни резултати:

Лема 4 (съществуване на усреднен оператор). Нека векторът $(a_\alpha(\tau, y, \zeta)\colon |\alpha| \le m)$ удовлетворява условията А, Б и В и $Q = (0, T] \times \Omega$ е произволно фиксиран цилиндър от $\mathbb{R}^{n+1}$ с достатъчно гладка граница $\partial\Omega$. Нека освен това

$$P_{k'}(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(\epsilon_{k'}^{-\mu} t, \epsilon_{k'}^{-r} x, \partial u), \tag{13}$$

където $\epsilon_{k'} > 0$, $\forall\ k' \in \mathbb{N}$; $\lim_{k'\to\infty} \epsilon_{k'} = 0$; $\mu > 0$ и $r > 0$.

Тогава съществуват подредица $\{P_k\} \subset \{P_{k'}\}$ и параболичен оператор

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{a}_\alpha(t, x, \partial u) \tag{14}$$

такива, че

$$P_k \overset{G}{\Longrightarrow} P.$$

Теорема 1 (автономен случай). Нека да е изпълнено условието на лема 4, $r = 1$ и $\mu = 2m$. Тогава коефициентите на усреднения оператор

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{a}_\alpha(t, x, \partial u)$$

не зависи от t и x. В сила са равенствата

$$\widetilde{a}_\alpha(t,x,\eta,\xi) = b_\alpha(\eta,\xi), \quad \forall\ |\alpha| \le m, \quad \forall\ (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2},$$

където

$$b_\alpha(\eta,\xi) = \langle a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D_y^m N)\rangle_{\tau,y}, \qquad \forall\ |\alpha| \le m,$$

$N(\tau,y,\eta,\xi) \in \mathcal{W}_{\mathrm{per}}$ и е решението на уравнението

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} + \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_y^\alpha a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D_y^m N) = 0.$$

В неавтономния случай са доказани следните теореми:

Теорема 2. Нека да е изпълнено условието на лема 4, $r = 1$ и $\mu < 2m$. Тогава коефициентите на усреднения оператор

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{a}_\alpha(t,x,\partial u)$$

не зависят от t и x. В сила са равенствата

$$\widetilde{a}_\alpha(t,x,\eta,\xi) = b_\alpha(\eta,\xi), \qquad \forall\ |\alpha| < m, \quad \forall\ (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m_2},$$

където $b_\alpha(\eta,\xi) = \langle a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D^m N_1)\rangle_{\tau,y}$, $N_1(\tau,y,\eta,\xi) \in \mathcal{V}_{\mathrm{per}}$ и е решение на уравнението

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_y^\alpha a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D_y^m N_1) = 0.$$

Теорема 3. Нека да е изпълнено условието на лема 4, $r = 1$ и $\mu > 2m$. Тогава коефициентите на усреднения оператор

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widetilde{a}_\alpha(t,x,\partial u)$$

не зависят от t и x. В сила са равенствата

$$\widetilde{a}_\alpha(t,x,\eta,\xi) = b_\alpha(\eta,\xi), \qquad \forall\ |\alpha| \le m, \qquad \forall\ (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2},$$

където

$$b_\alpha(\eta,\xi) = \langle a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D_y^m N_2)\rangle_{\tau,y},$$

$N_2(y,\eta,\xi) \in V_{\mathrm{per}}$ и е решение на уравнението

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D_y^\alpha \langle a_\alpha(\tau,y,\eta,\xi + D_y^m N_2)\rangle_\tau = 0.$$

В §3.4. е решена задачата за усредняване само по пространствените променливи x. В този случай изучаваме семейството от оператори

$$P_\epsilon(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha\left(t, \frac{x}{\epsilon}, \partial u\right),$$

където коефициентите $(a_\alpha(t,y,\zeta) : |\alpha| \le m)$ са определени в $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m_0}$ и удовлетворяват следните три условия:

А1.
(i) *Условие на Каратеодори.* За всяко α, функцията $a_\alpha(t,y,\zeta)$ е:

(а) измерима в $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ и E-периодична по y за всяко фиксирано $\zeta\in\mathbb{R}^{m_0}$

(б) непрекъсната върху $\mathbb{R}^{m_0}$ за почти всяко $(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$

(ii) *Ограниченост.* Съществуват такива константи $C_1>0$ и $K_1\ge 0$, че

$$|a_\alpha(t,y,\zeta)|^{p'} \le C_1|\zeta|^p + K_1,$$

за почти всяко $(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ и $\forall\zeta\in\mathbb{R}^{m_0}$.

Б1. Съществува такава константа $C_3>0$, че

$$\sum_{|\alpha|\le m}(a_\alpha(t,y,\zeta)-a_\alpha(t,y,\zeta'))(\zeta_\alpha-\zeta'_\alpha)\ge C_3|\zeta-\zeta'|^p$$

за почти всяко $(t,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ и за произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$

В1 (*Непрекъснатост*). Съществуват константи $C_4>0$ и s такива, че $0<s<1$ и

$$|a_\alpha(t,y,\zeta)-a_\alpha(t,y,\zeta')|^{p'}\le C_4(1+|\zeta|^p+|\zeta'|^p)^s|\zeta-\zeta'|^{p(1-s)},$$

за почти всяко $(t,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, за произволни ζ и ζ' от $\mathbb{R}^{m_0}$ и $\forall\ |\alpha|\le m$.

Изследванията са направени в пространствата:
$\mathcal{V}_1 = L^p(0,T;V_{\text{per}})$ с норма $|||u|||_1 = \left[\int_0^t \|u(t,y)\|^p_{\text{per}}dt\right]^{\frac{1}{p}}$;
$\mathcal{V}'_1 = L^{p'}(0,T;V'_{\text{per}})$ с норма $|||f|||_{*1}$;
$\mathcal{W}_1 = \left\{u\in\mathcal{V}_1 : \frac{\partial u}{\partial t}\in\mathcal{V}'_1\right\}$ с норма $|||u|||_{01} = |||u|||_1 + \left|\left|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\right|\right|_{*1}$;
$\mathcal{W}_{01} = \{u\in\mathcal{W}_1 : u(0)=0\}$.
(За пространството $\mathcal{W}_1$ са в сила свойства от 1 до 5 от глава 1.)
Основният резултат е доказан в точка 3.4.3 от §3.4 и се формулира така:
Теорема 4. Нека операторите $P_k(u)$ и $P(u)$ да удовлетворяват следните две условия:

(i)
$$P_k(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha\left(t,\frac{x}{\epsilon^k},\partial u\right),$$

където $(a_\alpha(t,y,\zeta)\colon |\alpha|\leq m)$ удовлетворяват условията А1, Б1 и В1, $\epsilon_k>0$ и $\lim_{k\to\infty}\epsilon_k=0$.

(ii)
$$P(u)=\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{|\alpha|\leq m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha b_\alpha(t,\partial u),$$

където $b_\alpha(t,\eta,\xi)=\langle a_\alpha(t,y,\eta,\xi+D_y^m N_1)\rangle_y$ и $N_1(t,y,\zeta)\in\mathcal{V}_1$ и удовлетворява равенството

$$\int\limits_0^T\int\limits_E\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(t,y,\eta,\xi+D_y^m N_1)D_y^\alpha v\,dydt=0,$$

$\forall\ v\in\mathcal{V}_1$ и $\forall\ \zeta=(\eta,\xi)$.

Тогава за произволен цилиндър $Q=(0,T)\times\Omega$ (с достатъчно гладка $\partial\Omega$) е в сила

$$P_k\Longrightarrow P.$$

В. В. Жиков, С. М. Козлов и О. А. Олейник в [81] и [82] решават задачата за усредняване на линейни параболични уравнения от $2m$-ти ред с помощта на G-сходимостта. А. А. Панков в [57] разглежда изчерпателно случая $m=1$. Там е изследван и случая когато $\mu>0$ и $r=0$.

Резултатите от глава 3 са докладвани на международни конференции в гр. Варна през 1986 г. и в гр. Бургас 2001 г. Публикувани са в М. Маринов [100] и [103].

2.4 Глава 4. Усредняване на израждащи се параболични уравнения

В Глава 4 е решена задачата за усредняване на уравнението на нютоновската филтрация в периодична среда. Поради израждането на елиптичната част, развитият в глави 1, 2 и 3 метод не е приложим и задачата се решава с помощта на метод, основаващ се на подходящи енергирични оценка. По-точно, изучаваме поведението на решението $u^\epsilon(x,t)$ на граничната задача

(1)
$$\frac{\partial u^\epsilon(x,t)}{\partial t}-\sum_{j,i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{x_j}=0\quad\text{в } Q,$$

(2)
$$u^\epsilon(x,0)=u_0(x)\quad\text{върху } \Omega,$$

(3)
$$u^\epsilon(x,t)=0\quad\text{върху } S,$$

при $\epsilon>0$ и ϵ клонящо към нула. С Ω означаваме ограничена област от $\mathbb{R}^n$ с достатъчно гладка граница $\partial\Omega$; $Q=\Omega\times(0,T)$ и $S=\partial\Omega\times(0,T]$.

За функциите, определящи задачата (1)–(3) предполагаме, че са изпълнени следните три условия.

H1. Коефициентите $a_{ij}(y)$ са $Y-$периодични функции по $y \in \mathbb{R}^n$
от класа $C^2(\mathbb{R}^n)$, за които:

(i) $a_{ij}(y) = a_{ji}(y), \ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$

(ii) съществува такава константа $\lambda > 0$, че

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

където $|\xi|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2$

(iii) $Y = [0, y_1^0] \times \cdots \times [0, y_n^0]$ е фиксиран паралелепипед с ребра успоредни на координатните оси

H2. Функцията $\varphi(s) \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^3(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворява условията:

(i) $\varphi(0) = 0$

(ii) $\varphi'(s) > 0, \forall\, s \neq 0$

(iii) $\varphi''(s) > 0, \forall\, s > 0$

H3. Началното условие $u_0(x)$ ще предполагаме, че е неотрицателна, непрекъсната върху $\overline{\Omega}$ функция такава, че $\varphi(u_0(x)) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $u_0(x) = 0, \forall\, x \in \partial\Omega$.

Дефиниция. Функцията $u^\epsilon(x,t)$ ще наричаме обобщено решение на задачата (1)–(3) ако удовлетворява следните четири условия:

(i) $u^\epsilon(x,t) \in L^\infty(Q)$ и $u^\epsilon(x,t) \geq 0$ почти навсякъде в Q

(ii) Обобщениеото производни $\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{\partial x_j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, принадлежат на пространството $L^2(Q)$

(iii) За всяка функция $f(x,t) \in H^1(Q) \cap C(\overline{Q})$ и $f(x,t) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ или $t = T$ е изпълнено равенството

$$\iint\limits_{Q} \left\{ u^\epsilon(x,t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{\partial x_j}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x_i} \right\} dxdt + \int\limits_{\Omega} f(x,0)u_0(x)dx = 0$$

(iv) За почти всяко $(x^0, t^0) \in S$ съществува границата $\lim u^\epsilon(x,t) = 0$ при $(x,t) \in Q$ и (x,t) клонящо към (x^0, t^0) по нормалата на S

Основните резултати в глава 4 са доказани в теорема 2 и теорема 3.

Теорема 2. За всяко $\epsilon > 0$ задачата (1)–(3) има решение $u^\epsilon(x,t)$. Решението $u^\epsilon(x,t)$ удовлетворява неравенствата

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \leq u^\epsilon(x,t) \leq M \text{ за почти всяко } (x,t) \in Q, \\ \left\|\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq M, \ \left\|\frac{\partial\varphi(u^\epsilon)}{\partial x_j}\right\|_{L^2(Q)} \leq M, \ j \in \{1, \ldots, n\}, \end{array} \right. \tag{4}$$

където константата M не зависи от ϵ.

В теорема 2, освен съществуване на решение на задачата (1)–(3), $\forall\ \epsilon > 0$, са доказани априорни оценки на решението $u^\epsilon(x,t)$.

От линейната теория е известно (вж. [112]), че за всяко $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ съществува и то единствена функция $w_s(y) \in H^1_{\text{per}}(Y)$ такава, че

$$\int\limits_Y \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(y) \frac{\partial w_s(y)}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_j} dy = \int\limits_Y v(y) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{is}(y)}{\partial y_i} dy \tag{22}$$

за всяко $v \in H^1_{\text{per}}(Y)$.

Освен това за константите

$$b_{ij} = \frac{1}{\text{mes}Y} \int\limits_Y \left[a_{ij}(y) \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(y) \frac{\partial w_j(y)}{\partial y_k} \right] dy, \quad \{i, j\} \in \{1, 2, \dots, n\}$$

е в сила

$$b_{ij} = b_{ji} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \lambda = \text{const} > 0.$$

Тогава задачата

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 \varphi(u(x,t))}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{в } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ в } \Omega, \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{върху } S, \end{array} \right. \tag{23}$$

има решение според теорема 2. Ще отбележим, че от доказаната в §4.2 теорема 1 следва единственост на решението, както на задача (1)–(3), така и на задача (23).

С теорема 3 ние доказваме, че задача (23) е усреднената задача на задача (1)–(3).

Теорема 3. Ако $u^\epsilon(x,t)$ е решението на задача (1)–(3) за $\epsilon > 0$ и $\widetilde{u}(x,t)$ е решението на задача (23), то при $\epsilon \to 0+$ са в сила

$$\lim u^\epsilon(x,t) = \widetilde{u}(x,t) \quad \text{в } L^2(Q)$$

и

$$\lim \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial \varphi(u^\epsilon(x,t))}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial \varphi(\widetilde{u}(x,t))}{\partial x_j}$$

в слабата топология в $L^2(Q)$.

Резултатите от тази глава са докладвани на международна конференция в гр. Москва през 1985 г. Те са публикувани в М. Маринов [96] и [97]. А. С. Калашников цитира [96] в своята статия [89]. А. А. Панков в монографията [57] цитира статията [97], като отбелязва, че в §4.3 от монографията се представят резултатите от статията [96], като условието $(H3)$ е заменено с $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, а в $(H1)$ се предполага $a_{ij}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.5 Глава 5. Оценки на носителя на решението на израждащи се параболични уравнения с двойна нелинейност

В Глава 5 са изследвани качествени свойства на решенията на смесената задача

(1)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(u)\right) = f(t,x) \quad \text{в} \quad Q_T; \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{върху} \quad \Omega; \\ u(t,x) = g(t,x) \quad \text{върху} \quad S_T, \end{cases}$$

където Ω е ограничена област от $\mathbb{R}^n$ с достатъчно гладка граница $\partial\Omega$, $Q_T = (0,T] \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$ и $f(t,x)$, $u_0(x)$, $g(t,x)$ са неотрицателни функции от L^∞. Доказани са крайна скорост на разпространение на топлинната вълна и поява на лакуна, когато функциите $f(t,x)$, $u_0(x)$ и $g(t,x)$ удовлетворяват съответно условието H3 и H4.

H3. Съществува число $\rho > 0$ такова че
$\operatorname{supp} u_0(x) \cup \left(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{supp} f(t,\cdot)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{supp} g(t,\cdot)\right) \subset \Omega_\rho,$
$\Omega_\rho = \{x \in \Omega : |x| < \rho\}.$

H4. Съществува число $r > 0$, такова че
$\operatorname{supp} u_0(x) \cup \left(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{supp} f(t,\cdot)\right) \cup \left(\bigcup_{t\in(0,T)} \operatorname{supp} g(t,\cdot)\right) \cap \Omega_r = \emptyset$

В §5.2 са доказани точни оценки на фронта на топлинната вълна и поява на лакуната, когато $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяват степенни оценки, а в §5.3 резултатите са обобщени за максимално общи нелинейности.

По-точно в §5.2 предполагаме, че нелинейностите $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяват условието

H1.

(i) $\psi(-s) = -\psi(s)$ и $\varphi(-s) = -\varphi(s)$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$;

(ii) $\psi(s) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus 0)$ и съществуват такива числа b_1, b_2, че

$$b_1|s|^{p-2} \le \psi'(s) \le b_2|s|^{p-2}, \qquad p > 1;$$

(iii) $\varphi(s) \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus 0)$ и съществуват такива числа B_1 и B_2, че

$$B_1|s|^{q-2} \le \varphi'(s) \le B_2|s|^{q-2}, \qquad q > 1,$$

където $(p-1)(q-1) > 1$.

Доказани са следните теореми:

Теорема 1. Нека за задачата (1) да са изпълнени условията H1 и H3.
Тогава, ако $u(t,x)$ е решение на задачата (1), то съществува такава константа $\gamma_1 > 0$, че

(5)
$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset \left\{x \in \Omega : |x| \le \rho + \gamma_1 t^\beta\right\},$$

където $\beta = \frac{1}{p}$, а ако $u_0(x) \equiv 0$ и $g(t,x) \equiv 0$, то за малки t е в сила

$$\beta = \max\left\{\frac{(p-1)(q-1)-1}{(p-1)(q-1)+1}, \frac{1}{p}\right\}.$$

Теорема 2. Нека за задача (1) да са изпълнени условия H1 и H4.

Тогава, ако $u(t,x)$ е решение на задачата (1), то за всяко $\alpha \in (0,1)$ съществува такава константа $\tau_1 > 0$, че

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) \cap \left\{x \in \Omega : |x| \leq \alpha r - \frac{\alpha r}{\tau_1} t\right\} = \emptyset \text{ при } t \in (0, \tau_1).$$

В §5.3 предполагаме, че нелинейностите $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяват следните три условия:

h1.
(i) $\{\varphi(s), \psi(s)\} \subset C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(ii) $\varphi'(s) > 0$, $\psi'(s) > 0$ за всяко $s \neq 0$;

(iii) съществува такава монотонно растяща функция $k_0(l)$, за която

$$\frac{\psi'(ls)}{\psi'(s)} \leq k_0(l), \qquad \forall\, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Означаваме с $\Phi(s)$ обратната функция на функцията $\varphi(s)$, а с $\Psi(s)$ обратната функция на функцията $\psi(s)$.

h2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{ds}{\Psi(a\Phi(s))} = \infty$ за $a > 0$ и $\int\limits_0^1 \frac{ds}{\Psi(a\Phi(s))} < \infty$ за $a > 0$.

h3. Съществува такава константа $\beta > 0$, че

$$\frac{s[\Psi(a\Phi(s))]'_s}{\Psi(a\Phi(s))} \geq \beta,$$

за $\forall\ s \neq 0$ и $a < 0$.

При тези условия функцията $\varkappa(s) = \int\limits_0^s \frac{ds}{\Psi(a\Phi(s))}$ е строго монотонно растяща. Означаваме с $k(s)$ обратната функция на функцията $\varkappa(s)$, а с $\gamma(s)$ обратната функция на функцията

$$s^2 \left[k\left(\frac{\varkappa(\varphi(l(T)))}{s}\right)\right]^{-1}, \qquad \forall\ s \in (0, +\infty),$$

където $l(t) = t\|f\|_{L^\infty(Q_T)} + \max\left\{\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g_0\|_{L^\infty(S_T)}\right\}$.

Доказани са следните теореми:

Теорема 3. Нека за задача (1) да са изпълнени условия h1, h2 и условие H3.
Тогава съществува такава константа $c_0 > 0$, че ако $u(t,x)$ е решение на задачата (1), то

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) \subset \{x \in \Omega : |x| \le \rho + c_0\gamma(t)\}.$$

Теорема 4. Нека за задачата (1) да са изпълнени условията h1, h2, h3 и условие H4.
Тогава, ако $u(t,x)$ е решение на задачата (1), то за всяко $\alpha \in (0,1)$ съществува такава константа $\tau(\alpha)$, че

$$\operatorname{supp} u(t,\cdot) \cap \left\{x \in \Omega : |x| \le \alpha r - \frac{\alpha r}{\tau(\alpha)} t\right\} = \emptyset.$$

В теореми 1 и 3 се доказва оценка на фронта та топлинната вълна, а в теореми 2 и 4 се доказва поява на лакуна. Доказателствата на теоремите съществено използват доказаните в леми 1 и 4 подходящи принципи за сравняване, които имат и самостоятелен интерес.

Резултатите и основните доказателства от глава 5 са публикувани в М. Л. Маринов, Ц. Рангелов [98] и [49]. Кратко съобщение на част от тях е публикувано в M. L. Marinov, Ts. Rangelov [48]. Случаят когато нелинейностите не са степенни е докладван на международната конференция Диференциални урванения и приложения, 1985, Русе (Вж. [50]).

Получените резултати обобщават резултатите от [12], [10], [106], [23] и [45], които се отнасят за уравнения с единична нелинейност (т.е. $\psi'(s) = const.$ или $\varphi'(s) = const.$) и резултатите на А. Калашников[86] и [87] за случая на една пространствена променлива (т.е. $n = 1$). Ще отбележим, че в работи С. Антонцев [72] и J. Diaz, L. Veron [24] с друг метод (локално-енергетичен) се изследват уравнения с нелинейност ψ, зависеща и от t и от x, както на φ се налагат степенни ограничения.

Резултатите от тази глава са цитирани от А. С. Калашников в УМН (вж. [89]) и H. Gilding, R. Kersher в Proc. Royal Soc. Edinburg (вж. [44]).

2.6 Глава 6. Оценка на началната следа на решенията на уравнението на Нютоновата филтрация

В глава 6 изучаваме неотрицателни, непрекъснати слаби решения на задачата на Коши за уравнението на Нютоновата филтрация

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta\varphi(u(x,t)) = 0, \tag{1}$$

когато нелинейността $\varphi(s)$ удовлетворява следните три условия:

H1. $\quad \varphi(s) \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \qquad \varphi'(s) > 0$ за $s \neq 0, \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, s\varphi''(s) \ge 0.$

H2. $\quad \int\limits_0^\sigma \frac{\varphi'(s)}{s} ds < \infty, \qquad \forall\ \sigma \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty).$

Н3. Съществуват монотонно намаляваща функция $F(t)$ и константа $\alpha \in (0,1)$, такива, че

$$\alpha s \int\limits_0^s \frac{\varphi'(t)}{t} dt \geq \int\limits_0^s F(t)\varphi'(t)dt \geq \frac{s(\varphi'(s))^2}{s\varphi''(s) + \frac{2}{d}\varphi'(s)}$$

за всяко $s > 0$.

Наред с функцията $\varphi(s)$ ние ще използваме и функцията $\psi(\sigma)$ която е дефинирана с равенството

$$\sigma = \int\limits_0^{\psi(\sigma)} \frac{\varphi'(s)}{s} ds,$$

а с $\psi^{-1}(\sigma)$ означаваме обратната функция на функцията $\psi(\sigma)$.

Освен това използваме и следните стандартни означения:

$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d: \ |x - x_0| < r\}$;

$S(\tau_1, \tau_2) = \mathbb{R}^d \times (\tau_1, \tau_2]$, $S_T = S(0,T)$;

$|B_r(x_0)|$ е обемът на кълбото $B_r(x_0)$ и $J_r(u) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int\limits_{B_r(x_0)} u(x,t)dx$.

Основният резултат на глава 6 е доказаното точно необходимо условие за съществуване на решение на задачата на Коши за уравнението (1) в ивица с фиксирана ширина T. Доказана е следната теорема:

Теорема 1. Нека $u(x,t)$ е слабо решение на уравнението (1) в ивицата S_T, $T = const. > 0$ и $\varphi(s)$ удовлетворява условия Н1, Н2) и Н3. Тогава съществува и то единствена борелевска мярка μ в $\mathbb{R}^d$ за която

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(x,t)\eta(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \eta(x)\mu(dx), \quad \forall\ \eta \in C_0(\mathbb{R}^d) \tag{2}$$

За мярката μ, съществува такава константа C, че

$$\frac{1}{|B_r(x_0)|} \int\limits_{B_r(x_0)} \mu(dx) \leq C\psi\left(\frac{r^2}{T} + \left[\frac{T}{r^2}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\psi^{-1}(u(x_0,T))\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \tag{3}$$

за произволни $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$. Константата C зависи от φ и d и не зависи от $u(x,t)$.

Доказаната оценка (3) дава точна характеристика на допустимия ръст на началното условие в задачата на Коши, ако тази задача има решение в ивицата S_T.

Наред с теорема 1, в глава 6 са доказани и следните теореми, които имат самостоятелен интерес при изследването на пространствено-времевата структура на решенията на уравнение (1).

Теорема 3. Нека $u(x,t)$ е непрекъснато слабо решение на (1) в S_T и за функцията $\varphi(s)$ са изпълнени условия Н1 и Н2. Тогава, ако $\operatorname{supp} u(\cdot,0) \subset B_{r_0}$ и $\delta > 1$, то $\forall\ t \in (0,T]$ е изпълнено

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset B_{r(t)}$$

където

$$r(t) = r_0(2+\delta)\left\{1+\left[t\frac{1}{r_0^2}\psi^{-1}\left(\frac{J_{r_0}(u_0)}{\delta^d}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{24}$$

Теорема 4. Нека $u(x,t)$ е непрекъснато слабо решение на задачата (1) и за функцията φ са изпълнени условия H1, H2 и H3. Тогава, ако $\beta(s) \in C^1[t,T]$, $\beta(t) = 1$ и $\beta(T) = 0$, то за произволни точки x_0 и x от $\mathbb{R}^d$ е изпълнено

$$t^\alpha v(x,t) \le T^\alpha v(x_0,T) + \frac{|x-x_0|^2}{4}\int_t^T s^\alpha(\beta'(s))^2 ds, \tag{26}$$

където $v(x,t) = \psi^{-1}(u(x,t))$.

В теорема 3 е доказана оценка на скоростта на носителя на решението чрез L^1-нормата на началното условие, а в теорема 4 е доказана поточкова оценка на решението от харнаков тип.

В §6.2 е изследвана граничната задача за уравнението (1). Доказани са: принцип за сравняване (лема 1), съществуване на слабо решение (лема 2) и крайна скорост на топлинната вълна.

Резултатите от тази глава са публикувани в A. Fabricant, M. L. Marinov и Ts. V. Rangelov [32] и [33]. Те обобщават статията на D. Aronson , L. Caffarelli [5], в която се доказва съществуване и единственост на началната следа на решението на уравнение (1), когато $\varphi(s) = s^m$.

2.7 Глава 7. Свойства на решенията на уравнението на непрекъснатостта

В глава 7 изучаваме свойствата на непрекъснатите, неотрицателни слаби решения на уравнението

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \operatorname{div}(u.\mathbb{V}(u)) \tag{1}$$

в ивицата $S_T = (0,T)\times\mathbb{R}^d$. За векторът на скоростта $\mathbb{V}(u)$ ще предполагаме, че

$$\mathbb{V} = \left(\psi^1(\nabla\Gamma(u)), \psi^2(\nabla\Gamma(u)), \ldots, \psi^d(\nabla\Gamma(u))\right),$$

където $\psi^j(q) = \frac{\partial\psi}{\partial q_j}$, $j \in \{1,\ldots,d\}$; $\psi(q)$ е гладка, неотрицателна, изпъкнала, хомогенна от ред $p > 1$ функция; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$; $\Gamma(s) \in C^1(\mathbb{R})$ и $s\Gamma'(s) > 0$, $\forall\ s \neq 0$.

Основен инструмент в нашите изследвания е следното свойство на уравнението (1):

P1 (*регуляризиращ ефект*). Съществува такава неотрицателна функция $E(s)$, че

$$\operatorname{div}\mathbb{V}(u) \ge -\frac{E(u)}{t},$$

в смисъл на $D'(\mathbb{R}^d)$.

Това свойство е известно като *регуляризиращ ефект* на уравнение (1) и е обект на изследване от редица автори (вж. например [1], [17], [33]).

Основният резултат на глава 7 е в разработването на единен подход за изучаване на пространствено-времевата структура на решенията на уравнението на непрекъснатостта (1). Този подход се основава на връзката между наличието на регуляризиращият ефект P1 и поточковата оценка на решението. Това в частност дава възможност да се обобщят известните резултати за уравненията на политропичната филтрация

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial}{\partial x_j}(u^m) \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_j} u^m \right) \tag{50}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(|\nabla (u^m)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_j} u^m \right). \tag{51}$$

Уравнението (50) се получава при $\psi(q) = \frac{1}{p}\sum_{j=1} |q_j|^p$, а уравнението (51) – при $\psi(q) = \frac{1}{p}|q|^p$, като и в двата случая $\Gamma(s) = \frac{m}{r}s^r$.

Използваме следните означения:

(i) С $\Theta(s)$ е означена функцията спрегната по Юнг на функцията $\psi(q)$, т.е.

$$\Theta(s) = \sup_{q \in \mathbb{R}^d} \left\{ \sum_{j=1}^{d} s_j q_j - \psi(q) \right\}$$

(ii) $B_R^{\Theta}(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \ p\Theta\left(\frac{x-y}{p}\right) \le R^{p'} \right\}$

(iii) $|B_R^{\theta}(y)|$ е обемът на „кълбото“ $B_R^{\theta}(y)$

В глава 7 са доказани следните четири теореми:

Теорема 1 (поточкова оценка). Нека за уравнението (1) е изпълнено свойството $(P1)$ и $u(t,x)$ е непрекъснато, неотрицателно слабо решение на (1). Тогава са в сила следните две твърдения.

(а) Ако съществува такава константа α, че $E(u) \le \frac{\alpha\Gamma(u)}{u\Gamma'(u)}$, то за $0 < t < s < T$ е в сила

$$t^{\alpha}\Gamma(u(t,x)) \le s^{\alpha}\Gamma(u(s,y)) + p\ \Theta\left(\frac{y-x}{p}\right)\left[\frac{s^{\sigma}-t^{\sigma}}{\sigma}\right]^{\frac{-1}{p-1}}, \tag{7}$$

където $\sigma = 1-(p-1)\alpha$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{R}^d$.

(б) Ако съществува такава константа λ, че $E(u) \le \frac{\lambda}{u\Gamma'(u)}$, то за $0 < t < s < T$ е в сила

$$\Gamma(u(t,x)) \le \Gamma(u(s,y)) + \lambda \ln\frac{s}{t} + p\ \Theta\left(\frac{y-x}{p}\right)[s-t]^{\frac{-1}{p-1}}, \tag{8}$$

където $x \in \mathbb{R}^d$ и $y \in \mathbb{R}^d$.

Доказаната поточкова оценка е аналог та класическият резултат на J. Mozer [56] и обобщава теорема 4 от глава 6. В [56] оценката (8) е доказана за линейните уравнения с измерими коефициенти. Доказателството се основава на неравенството на Харнак, което не е изпълнено за нелинейните уравнения поради крайната скорост на топлинната вълна. В глава 7 с доказателството на теорема 1 и забележка 2 е показано, че поточковата оценка и регуряризиращия ефект P1 са много близки твърдения.

Теорема 2 ($L^\infty - L^1$-оценка). Нека $u(t,x)$ е слабо решение на уравнение (1) в ивицата S_T, което удовлетворява началното условие $u(0,x)=u_0(x)\in L^1(\mathbb{R}^d)$ в смисъла на $D'(\mathbb{R}^d)$. Ако са изпълнени условията на теорема 1 и $\sigma>0$, то съществува такава неотрицателна функция $K(s)$, за която

$$\Gamma(u(t,x)) \le \frac{1}{1-\sigma} K\left(\|u_0\|_{L^1}.t^{\frac{-d}{p}}\right) \tag{14}$$

и $K(s)=O\left(((1-\sigma)\Gamma(s))^\sigma\right)$ за малки s и $K(s)=O\left(s^{\frac{p\alpha}{d}}\right)$ за големи s.

Като следствие от доказателството на теорема 2 получаваме следните две твърдения:

(а) Когато $\Gamma(s)=\Gamma_n(s)=\frac{1}{n}|s|^n$ и са изпълнени условията на теорема 2, то

$$u(t,x) \le \left[n\left(\frac{d}{p'}\right)^\sigma \frac{\sigma^\alpha}{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{n}} t^{\frac{-\alpha}{n}} \left(\frac{\|u_0\|_{L^1}}{\omega}\right)^\sigma, \qquad n>0. \tag{17}$$

(б) Когато $\Gamma(s)=\Gamma_0(s)=\ln|s|$ и са изпълнени условията на теорема 2, то

$$u(t,x) \le \|u_0\|_{L^1}\frac{1}{\omega}t^{\frac{-d}{p}}\left(\frac{d}{p'}\right)^{\frac{d}{p'}} \exp\left(\frac{d}{p'}\right). \tag{18}$$

Ще отбележим, че $L^\infty - L^1$-оценката е доказана от различни автори с различни методи за отделни частни случаи на уравнението (1). Например Ph. Benilan и J. Berger в [14] доказват оценката (14) за уравнението на нютоновската филтрация, а J. Esteban и J. Vazquez в [30] доказват оценката (17) за уравнението (50) когато $d=1$.

Теорема 3 (крайна скорост). Нека $\Gamma(s)=\frac{1}{n}|s|^n$, $n>0$ и са изпълнени условията на теорема 2. Ако

$$\mathrm{supp} u_0 \subset B^\Theta_{R_0}(x_0), \qquad \text{то} \qquad \mathrm{supp} u(t,\cdot) \subset B^\Theta_{R(t)}(x_0),$$

където

$$R(t) \le R_0 + C.t^{\frac{\sigma}{p}}\left[\Gamma(\|u_0\|_{L^1})\right]^{\frac{\sigma}{p'}} \tag{19}$$

и константата C зависи само от α, p и d.

Тази теорема обобщава теорема 3 от глава 6. Тя дава оценка на носителя на решението с L^1-нормата на началното условие и за уравнения с двойна нелинейност. Точността на получената оценка се илюстрира с помощта на подходящо баренбладско решение.

Теорема 4 (оценка на началната следа). Нека $u(t,x)$ да удовлетворява следните условия:

(i) Функцията $u(t,x)$ е непрекъснато, неотрицателно решение на уравнението (50) или (51).

(ii) $m > 1$;

(iii) Функцията $u(t,x)$ удовлетворява свойството P1.

Тогава съществува единствена неотрицателна борелевска мярка μ, такава че

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\chi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(x)\mu(dx), \qquad \forall\ \chi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d); \tag{24}$$

$$\frac{1}{|B_R^\Theta(x_0)|}\int\limits_{B_R^\Theta(x_0)}\mu(dx) \le C\left\{\left(\frac{T^{\frac{1}{p}}}{R}\right)[u(T,x_0)]^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\frac{R^p}{T}\right)^{\frac{1}{m(p-1)-1}}\right\}, \tag{25}$$

където C зависи само от m, p и α, а R е произволно положително число.

Тази теорема обобщава резултата на D. Aronson L. Caffarelli [5], който се отнася за уравнение (50) с $p = 2$ и резултата на E. Di Benedetto и M. Herrero [25], който разглежда случая на уравнение (51) с $m = 1$

В §7.3 са доказани три подхода за получаване на регуляризиращия ефект P1, в зависимост от допълнителната информация за $\mathbb{V}(u)$. В частност доказан е регуляризиращия ефект за уравненията (50) и (51). Този резултат обобщава резултата на J. Esteban и J. Varquez [30], който се отнася за уравнение (51) с $m = 1$. Освен това доказва, че теореми от 1 до 4 са в сила за уравненията на политропическата филтрация (50) и (51).

2.8 Глава 8. Оценки на решенията на нелинейни параболични уравнения

В глава 8 изучаваме гладките решенията на параболични уравнения от вида

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}a_j(u,\nabla u) + a_0(u,\nabla u) \tag{1}$$

в ивицата $S_T = [0,T)\times\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$ и $T > 0$. Изследвани са свойствата регурялизиращ ефект, поточкова оценка и оценка на градиента на решението.

За разлика от проведените в глави 5, 6 и 7 изследвания, в този случай не се *предполага хомогенност на a_j* и се *допуска наличието на общи младши членове*. Това поражда нетривиални трудности от идеен и технически характер.

За гладки решения $u(t,x)$ на (1) са открити устойчиви комбинации от u и ∇u, които се поддават на априорни оценки. Това дава възможност да се обобщи свойството регуляризиращ ефект във вида

$$u_t - b(u,\nabla u) = \partial_j a_j(u,\nabla u) + c(u,\nabla u) \geq f(t)$$

където $b + c = a_0$ и $b(u,q)$ е гладка функция изпъкнала по променливата q. (Виж леми 3 и 5). Както в горното равенство, така и до края на главата предполагаме сумиране по повтарящите се индекси. (Например $\partial_j a_j = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$.) Ще отбележим, че Benilan и Crandall в [11] (вж. също [31] и [89]) изследват регуляризиращия ефект на w_t за абстрактна задача на Коши от вида $w_t = Aw$, където A е хомогенен оператор.

В глава 8 е установено, че за уравнения от вида (1), регуляризиращият ефект може да се използва за доказателство както на поточковата оценка на решението, така и на оценка на градиента на решението.

Структурните ограничения, при които е представен резултата са мотивирани от така нареченото уравнение с „двойна степенна нелинейност“:

$$w_t = \partial_j \left(\left| |w|^\lambda \frac{\nabla w}{w} \right|^{p-2} |w|^\lambda \partial_j w \right) + \left(\frac{r}{p} - 1 \right) \frac{w}{|w|^\lambda} \left| |w|^\lambda \frac{\nabla w}{w} \right|^p \tag{2}$$

за λ, $r \in \mathbb{R}$ и $p > 1$.

Това нелинейно израждащо се или сингулярно уравнение се среща при изучаването на редица физически процеси. От естеството на самите задачи е естествено да се изучават неотрицателни решения на (2). Тяхните свойства, априорни оценки, качествени ефекти са обект на изследване от редица автори. Виж обзора на А. С. Калашников [89].

При формулировката на основните резултати ще използваме следните означения:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ и $q = (q_1, q_2, \ldots, q_d)$ са елементи от $\mathbb{R}^d$;
$S_T = \{(t,x) : t \in [0,T)\}$;
$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j \in \{1,\ldots,d\}$; $u_j = \partial_j u$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ и $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_d u)$, ако $u = u(t,x)$;
$f^j(u,q) = \frac{\partial}{\partial q_j} f(u,q)$ и $f^0(u,q) = \frac{\partial}{\partial u} f(u,q)$, ако f е функция, вектор-функция или матрица с елементи зависещи от (u,q). Освен това по *повтарящите се индекси ще считаме, че има сумиране от* 1 *до* d.

Основните резултати на глава 8 са представени в §8.4, когато:
$a_j(u,q) = \bar{a}_j(\eta(u)q)$,
$a_0(u,q) = \frac{1}{\eta(u)} \bar{b}(\eta(u)q)$,
$\eta(u) > 0$,
$\bar{b}(q)$ изпъкнала функция и $\eta(u)$ и $\bar{b}(q)$ са гладки.

В този случай за гладки решения на задачата на Коши.

$$\begin{cases} u_t = \partial_j \overline{a}_j(\eta(u)\nabla u) + \frac{1}{\eta(u)} \overline{b}(\eta(u)\nabla u), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{28}$$

когато $\left(\frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \right)' > 0$, уравнението удовлетворява определени структурни ограничения и

$$\partial_j \overline{a}_j(\eta(u_0)\nabla u_0) \geq -w_0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d,$$

от доказаните общи резултати в §8.2 и §8.3 (вж. лема 3 и лема 5) следва

$$\partial_j \overline{a}_j(\eta(u)\nabla u) \geq -\frac{w_0}{1+f_0 w_0 t}. \tag{31}$$

Тази редакция на регуляризиращия ефект е доказана в теорема 1 на §8.4. Това дава възможност за решенията на голям клас от уравнения от вида (1) да се докаже поточкова оценка.

Доказана е следната теорема:

Теорема 2 (поточкова оценка). Нека $u(t,x)$ е решение на задачата (28) и са изпълнени следните условия

(i) Функцията $\overline{b}(q)$ е гладка и изпъкнала.

(ii) За всяко u е в сила $\eta(u) > 0$, $\lambda(u) = \frac{\eta'(u)}{\eta(u)}$ и $\lambda'(u) \leq 0$.

(iii) Съществува функция $f(t)$, такава че $f(t) \geq 0$ и

$$\partial_j \overline{a}_j(\eta(u)\nabla u) \geq -f(t), \qquad \forall (t,x) \in S_T.$$

Тогава за произволни $0 < t_0 < t < T$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $\sigma \in (\min u, \max u)$ е изпълнено неравенството

$$\int\limits_{\sigma}^{u(t_0,x_0)} \eta(s)ds \leq e^{\lambda(\sigma)g(t)} \int\limits_{\sigma}^{u(t,x)} \eta(s)ds + \frac{e^{\lambda(\sigma)g(t)}-1}{\lambda(\sigma)}\eta(\sigma) + H_{\lambda(\sigma)}(t_0,t,x_0,x), \tag{33}$$

където $g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds$,

$$H_{\lambda(s)}(t_0,t,x_0,x) = \inf_{z(s)} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda(\sigma)g(s)}\overline{\beta}(\dot{z}(s))ds : z(t_0) = x_0, z(t) = x \right\}$$

и $\overline{\beta}(\xi)$ е спрегната по Юнг функция към функцията $\overline{b}(q)$.

Ако $\lambda(m) = \lambda(\min(u)) < \infty$ то оценката (33) може да се запише във вида

$$\int\limits_{u(t_0,x_0)}^{u(t,x)+g(t)} \eta(s)ds + H_{\lambda(m)}(t_0,t,x_0,x) \geq 0. \tag{34}$$

За уравнението с двойна нелинейност (2), доказаните теорема 1 и теорема 2 дават нови резултати. В този случай имаме $\eta(u) = e^{\lambda u}$, $\lambda = const.$, $\overline{b}(q) = \frac{r}{p}|q|^p$, $r > 0$, $p > 1$ и $k = r + \lambda(p-1)d > 0$. Ако освен това $\partial_j a_j(\eta(u_0)\nabla u_0) \geq -w_0$, $w_0 = const. > 0$, то регуляризиращият ефект (т.е. условие (iii) от теорема 2) е изпълнен с $f(t) = \frac{w_0}{1+w_0 f_0 t}$ и $f_0 = \frac{k}{d}$. (Това следва от теорема 1.) В този случай, оценката (34) може да се опрости, защото

$$H_\lambda = \sup_c \left[c_j(x_j - x_0) - r\overline{b}(c) \right] = \tau\overline{\beta}\left(\frac{x-x_0}{\tau}\right),$$

където

$$\tau = \tau(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\lambda(p-1)g(s)} ds = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{1 + w_0 f_0 s}{1 + w_0 f_0 t_0} \right)^{-\frac{\lambda d(p-1)}{k}} ds =$$

$$= \frac{d}{r f_0 w_0} (1 + w_0 f_0 t_0)^{\frac{\lambda d(p-1)}{k}} \left[(1 + w_0 f_0 t)^{\frac{r}{k}} - (1 + w_0 f_0 t_0)^{\frac{r}{k}} \right].$$

Ще илюстрираме поточковата оценка (33), като я запишем за $w = e^u$, когато $w_0 = \infty$. Означаваме $\alpha = \frac{\lambda d}{k}$, $\sigma = \frac{r}{k}$ и $p' = \frac{p}{p-1}$. Тогава

$$t_0^{\alpha} \frac{1}{\lambda} w^{\lambda}(t_0, w_0) \leq t^{\alpha} \frac{1}{\lambda} w^{\lambda}(t, x) + \frac{1}{p} k(t^{\sigma} - t_0^{\sigma}) \left[\frac{|x - x_0|}{k(t - t_0)} \right]^{p'} \qquad \text{за } \lambda \neq 0 \tag{36}$$

и

$$\ln w(t_0, x_0) \leq \ln w(t, x) + \frac{d}{r} \ln \frac{t}{t_0} + \frac{r}{p'} (t - t_0) \left[\frac{|x - x_0|}{r(t - t_0)} \right]^{p'} \qquad \text{за } \lambda = 0. \tag{37}$$

Лесно се вижда, че оценките (36) и (37) са аналог на класическите оценки на Мозер (вж. [56]) за линейния случай. Освен това, с помощта на подхода развит, в глава 7, поточковата оценка може да се използва при доказателствата на редица качествени свойства на решенията. Възможността регуляризиращият ефект да се използва при доказателството на оценки на градиента на решението се демонстрира с доказателствата на следните твърдения:

Теорема 3. Нека $d = 1$ и $u(t, x)$ е решение на задачата (28) за което са изпълнени следните условия:

(i) $|u(t, x)| \leq M = const. > 0$, $\forall\ (t, x) \in S_T$.

(ii) $\partial_x a'(\eta(u) u_x) \geq -f(t)$ и $f(t) \geq 0$, $\forall\ (t, x) \in S_T$.

Тогава функцията $\eta(u(t, x)) u_x(t, x)$ е ограничена в S_T.

Лема 8. Нека да са в сила следните условия:

1) Функцията $u(t, x)$ е гладко решение на задачата

$$\begin{cases} u_t = \partial_j \overline{a}_j(\eta(u) \nabla u) + a_0(u, \nabla u), \forall\ (t, x) \in S_T \\ \qquad u(0, x) = u_0(x), \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{38}$$

2) $\partial_j a_j^k \partial_k b(u, \nabla u) \leq l_0 . b^2(u, \nabla u)$, където $b(u, q) = \frac{1}{\eta(u)} \bar{b}(\eta(u).q)$ и $\bar{b}(q)$ е гладка изпъкнала функция.

Тогава е изпълнено неравенството

$$b(u, \nabla u) \leq \frac{b_0}{1 - l_0 b_0 t}, \quad \forall\ t \in \left[0, \frac{1}{l_0 b_0} \right), \tag{41}$$

където $b_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}^d} \{ b(u_0(x), \nabla u_0(x)) \}$.

Лема 9. Допускаме, че $a_j(u, \nabla u) = \psi(u)\overline{a}_j(\nabla u)$, $a_0(u, \nabla u)$, $u_0(x)$ удовлетворяват условията на лема 3 и $v = \frac{\psi'(u)}{\psi(u)}$. Нека освен това $v' a_j u_j + a_0^0 - v a_0 \leq 0$, тогава

$$\begin{cases} u_t \geq -\frac{1}{v_0 t}, & \text{ако} \quad v(u) \geq v_0 > 0, \\ u_t \leq -\frac{1}{v_1 t}, & \text{ако} \quad v(u) \leq v_1 < 0. \end{cases} \tag{44}$$

За уравнението (2) имаме $v = \lambda(p-1)$ в (44). Тогава за положително решение w на уравнението ние получаваме, че в слаб смисъл са изпълнени неравенствата

$$w_t \geq -\frac{w}{\lambda(p-1)t}, \text{ ако } \lambda > 0 \quad \text{и}$$

$$w_t \leq \frac{w}{\lambda(p-1)t}, \text{ ако } \lambda < 0.$$

В §8.6 е предложена регуларизация на уравнение (2), за която са в сила доказаните в глава 8 твърдения. Това дава възможност да се обобщят получените резултати и за обобщените решения на уравнение (2).

Резултатите от тази глава са публикувани в A. Fabricant, M. Marinov, Ts. Rangelov [37], и [38].

2.9 Глава 9. Съществуване на решение на задачата на Коши за полулинейни параболични уравнения с потенциал

В глава 9 изследваме съществуването на решение на задачата на Коши

$$\partial_t u - \Delta u + v(x)u(t,x) = F(t,x,u) \quad \text{в} \quad S_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u(0,x) = f(x) \quad \text{върху} \quad \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

където $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $0 < T \leq \infty$ и F, f и v са дадени функции.

Ще предполагаме, че нелинейността F удовлетворява следното условие:

H.
$F(t,x,\lambda) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ и съществуват такива положителни константи α, a и C, че $|F(t,x,\lambda)| \leq C|\lambda|^{1+\alpha}$ и $|F'_\lambda(t,x,\lambda)| \leq C$, $\forall\ (t,x,\lambda) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times [-a,a]$.

Използваме следните множества:
$\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty)$; $D = \{(t,x,s,y) : x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq s < t\}$;
$S_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $0 < T \leq \infty$.

Освен стандартното пространството $L^p(\mathbb{R}^n)$ с норма $\|\cdot\|_{L^p_x}$, в глава 9 използваме следните функционални пространства:

(а) $C_0(\mathbb{R}^n)$ е пространството получено от множеството на финитните функции $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ след попълване по норма $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{R}^n}\{|\varphi(x)|\}$.

(б) X е банахово пространство $L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ с норма

$$|\cdot|_X = \|\cdot\|_{L^1} + \|\cdot\|_{L^\infty}.$$

(в) $C(0,T;X)$ е пространството от непрекъснати функции $u : [0,T] \to X$ с норма

$$|u|_C = \sup_{0\le t\le T}\{|u(t)|_X\}.$$

(г) $C(\overline{\mathbb{R}}_+;X)$ е множеството от непрекъснати функции $u : [0,\infty) \to X$, чиито рестрикции принадлежат в $C(0,T;X)$ за всяко $T > 0$.

За облекчение на записа, означаваме

$$\mathcal{L}_v(u) = \partial_t u - \Delta u + v(x)u \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_0(f)(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x-y)f(y)dy,$$

където дадената функция $v(x)$, наричаме *потенциал*, а

$$\Gamma(t,x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad \text{ако} \quad t > 0 \quad \text{и} \qquad \Gamma(t,x) = 0 \quad \text{ако} \quad t \le 0.$$

В глава 9 за потенциали $v \not\equiv 0$ са доказани следните основни резултати:

1. Доказано е локално съществуване и единственост на решението на задачата на Коши (1) (2) с малки начални данни. Оценено е времето на съществуване на решението с помощта на L^∞-нормата на потенциала, нелинейността F и нормата на началните данни.

2. Доказана е $L^p - L^r$ оценка на решението на линейната задача с потенциал $v \not\equiv 0$.

3. За неотрицателни, ограничени потенциали и $\alpha > \frac{2}{n}$ е доказано глобално съществуване на решение на задачата (1) (2) с малки начални данни. (Това е естествено обобщение на резултата на H. Fujita [41] част A.)

В §9.2. е доказана следната теорема:

Теорема 1. Нека потенциалът $v(x)$ да е ограничена хьолдерова функция, а нелинейността F да удовлетворява условието H. Тогава за всяко $f \in X$ и $|f|_X < \frac{a}{2}$, задачата

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}_v(u) = F(t,x,u) & \text{в } S_\tau \\ u(0,x) = f(x) & \text{върху } \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \tag{3}$$

има решение $u(t,x) \in C(0,\tau;X)$ при

$$\tau = \min\left\{\frac{1}{2}[\|v\|_\infty + M(a)a^\alpha]^{-1}, \quad \frac{1}{2}[\|v\|_\infty + M(a)]^{-1}\right\},$$

където

$$M(s) = \sup_{0<|\lambda|\leq s}\left\{|\lambda|^{-1-\alpha}\sup_{(t,x)}\{|F(t,x,\lambda)|\}\right\} + \sup_{0<|\lambda|\leq s}\left\{\sup_{(t,x)}\{|F'_\lambda(t,x,\lambda)|\}\right\}$$

Ако $|f|_X < \eta$, $0 < \eta \leq \frac{1}{2}a$, то за решението $u(t,x)$ на задача (3) са изпълнени неравенствата

$$\sup_{[0,\tau]}\{|u(t,\cdot) - \mathcal{U}_0(f)|_X\} \leq \eta, \tag{4a}$$

$$|u(t,\cdot)|_X \leq 2\eta, \quad \forall\ t \in [0,\tau]. \tag{4b}$$

Ще отбележим, че с помощта на доказаната оценка на времето на локално съществуване τ, от теорема 1 получаваме

Следствие 1. Нека да са в сила условията на теорема 1, $f \in X$, $|f|_X \leq 2^{-k}a$, k е произволно фиксирано естествено число и τ е определено в теорема 1. Тогава задачата на Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}_v(u) = F(t,x,u) & \text{в } S_{k\tau} \\ u(0,x) = f(x) & \text{върху } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

има единствено решение $u(t,x) \in C(0,k\tau;X)$. Решението $u(t,x)$ удовлетворява оценката

$$|u(t,\cdot)|_X \leq 2^{-k+i}a, \qquad \forall\ t \in ((i-1)\tau, i\tau],\ \forall\ i \in \{1,2,\ldots,k\}.$$

Освен това, в §9.2 е доказано общо достатъчно условие върху импулсите, което гарантира глобално съществуване на решение на импулсната задача. (Вж. следствие 2 в §9.2.)

Основен инструмент за изследване на глобалното съществуване на решение на задачата на Коши (1), (2) е следната $L^p - L^r$ оценка

Теорема 2. Нека потенциалът $v(x)$ е ограничена хьолдерова функция, $1 \leq r < p$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Тогава задачата на Коши

$$\begin{cases} \mathcal{L}_v(u) = F_0(t,x) & \text{в } S_T \\ u(0,x) = f(x) & \text{върху } \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{12}$$

за $f(x) \in X$ и $F_0 \in C(0,T;X)$, има решение $u(t,x)$, което $\forall\ t \in [0,T]$ удовлетворява оценките

$$\|u(t,.)\|_{L^p_x} \leq \frac{C}{(1+t)^{\frac{n}{2q}}}\left\{\|f\|_{L^r_x} + \|f\|_{L^p_x} + \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \|F_0(s,\cdot)\|_{L^r_x} ds + \int\limits_0^t (1+s)^{\frac{n}{2q}} \|F_0(s,\cdot)\|_{L^p_x} ds\right\} \tag{13a}$$

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p_x} \leq C\left\{\|f\|_{L^p_x} + \int\limits_0^t \|F_0(s,\cdot)\|_{L^p_x} ds\right\}, \tag{13b}$$

където $C = const. > 0$, която не зависи от t, f и F_0.

При доказателството на теорема 2 използваме свойствата на фундаменталното решение на (12), доказани от Qi S. Zhang в [71].

С помощта на теорема 2 в лема 1 се доказват енергетични оценки за решението на задачата (1), (2). С тяхна помощ са доказани следните две теореми.

Теорема 3. Нека потенциалът $v(x)$ е неотрицателна, ограничена хьолдерова функция, нелинейността F да удовлетворява условието H и $\alpha > \frac{2}{n}$. Тогава съществува такова константа $\delta > 0$, че ако $f \in X$ и $|f|_X < \delta$, то задачата (1) (2) има глобално решение

$$u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; X).$$

Теорема 4. Нека да са изпълнени условията на лема 1 и $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} v(x) < 0$. Тогава за всяко число $M > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че задачата на Коши (1) (2) с начално условие $f(x) \in X$ и $|f|_X < \delta$ има решение

$$u(t,x) \in C(0,T;X),$$

където $T > M$.

След статията на H. Fujita [41] редица автори са изучавали времето на съществуване на нелинейните параболични уравнения (Вж. [111], [42], [69], [47], [59], [60] и приведената там литература.) Във всички случаи се предполага, че $v(x) \equiv 0$. Изследваната в глава 9 задача с ненулев потенциал е интересна както за приложенията, защото описва взаимодействие с външен източник, така и от математическа гледна точка.

3 Библиография

[1] D. Aronson, Ph. Benilan. Régularité des solutions de l'équation de milleux poreux dans $\mathbb{R}^n$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **288** (1979), 2, 103–105.

[2] D. G. Aronson, L. A. Peletier. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains. *J. Diff. Equations*, **3** (1981), 378–412.

[3] D. Aronson, M. Crandall, L. Peletier. Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem. *Nonlinear Anal. TMA*, **6** (1982), 1001–1022.

[5] D. Aronson, L. Caffarelli. The initial trace of a solutions of the porous medium equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **280** (1983), 351–365.

[10] Ph. Bénilan, M. Crandall. The continuous dependence on φ of the solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. *Ind. Univ. Math. J.*, **30** (1981), 161–177.

[11] Ph. Benilan, M. G. Crandall. Regularizing effect of homogeneous evolution equation. In: Contribution to Analysis and Geometry (Eds D. N. Clark et al.). J. Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1981, 23–30.

[12] Ph. Bénilan, M. Crandall. Regularizing effects of homogeneous evolution equations. *Amer. J. Math.* (1982), 23–29.

[15] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. Asympttotic analysis for periodic structure. North Holland, Amsterdam, 1978.

[17] M. Crandall, M. Pierre. Regularizing effect for $u_t = \Delta\varphi(u)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **274** (1982), 159–168.

[19] E. De Giorgi, S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori elliptici del secondo ordine. *Boll. Un. Mat. Ital. (4)*, **8** (1973), 391–411.

[20] E. De Giorgi. G-operators and Γ-convergence. *Proc. Int. Cong. Math.* (Warszawa, 1983), North Holland, Amsterdam, 1984, 1175–1191.

[21] E. De Giorgi. Generalized limits in calculs of variations. Topics in functional analysis. Pisa, 1980–81.

[23] J. Diaz, M. Herrero. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. *Proc. Roy. Soc. Edinb., Sect. A*, **89** (1981), 249–258.

[24] J. Diaz, L. Veron. Compacité du support des solutions d'équations quasilinéaires elliptiques on paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **297** (1983), 149–152.

[25] E. Di Benedetto, M. Herrero. On the Cauchy problem and initial trace for a degenerate parabolic equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **314** (1989), 1, 187–224.

[30] J. Esteban, J. Vazquez. Régularité des solutions positive de l'équation parabolique p-Laplacienne. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **310** (1990), 105–110.

[31] L. C. Evans. Application of nonlinear semigroup theory to certain partial differential equations. In: Nonlinear Evolution Equations (Ed. M. Crandall). Academic Press, New York, 1978, 163–188.

[32] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. On the estimates of the initial trace of solution of filtration equation. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **40** (1987), 2, 25–27.

[33] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Estimates on the initial trace for the solutions of the filtration equation. *Serdica*, **14** (1988) 245–257.

[34] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Properties of solutions of nonlinear filtration equation. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **42** (1989), 7, 15–18.

[35] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Regularizing effect for nonlinear filtration equations. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **44** (1991), 12, 9–11.

[36] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Some properties of nonlinear degenerate parabolic equations. *Mathematica Balkanica*, **8** (1994), 59–73.

[37] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Estimates for nonlinear parabolic equations. *Mathematica Balkanica*, **14** (2000), 362–386.

[38] A. A. Fabricant, M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Estimates for parabolic equations. *C. R. Acad. Burgare Sci.*, **53** (2000), No 7, 31–34.

[39] A. A. Fabricant, Ts. Rangelov. Cauchy problem for nonlinear denerate parabolic equation in one dimension. *Mathematica Balkanica*, **17** (2003), 71–94.

[41] H. Fujita. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I*, **13** (1966), 109–124.

[42] V. A. Galaktionov, H. A. Levine. On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux conditions on the boundary. *Israel J. Math.*, **94** (1997), 125–146.

[43] D. Gilbarg, N. Trudinger. Elliptic partial differential equations of second order. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[44] H. Gilding, R. Kershner. A necessary and sufficient conditions for finite speed of propagtion in the theory of doubly nonlinear degenerate parabolic equations. *Proc. Royal Soc. Edinburg*, **126A** (1996), 739–769.

[45] M. Herrero, J. Vazquez. On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equations. *Comm. Part. Diff. Eq.*, **7** (1982), 1381–1402.

[47] S. Klainerman. Long time behavior of solutions to nonlinear evolution equation. *Archs. Ration. Mech. Analyis*, **78** (1981), 73–98.

[48] M. L. Marinov, Ts. Rangelov. On the support of the solutions of some degenerate nonlinear parabolic equations. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **37** (1984), No 3, 281–282.

[49] M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Estimates on the support of the solutions for some nonlinear degenerate parabolic equations. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **39** (1986), 4, 17–19.

[50] M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Estimates on the support of the solutions for some nonlinear degenerate parabolic equations. Differentioal equations and applications, Proceeding of the Fourth Conference, Russe'1985, 1986, 805–808.

[51] M. L. Marinov, V. S. Georgiev. Global existence of solution to the semilinear heat equation. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **42** (1989), 6, 21–23.

[52] M. L. Marinov. Life-spen solution to semilinear parabolik equation. Twelfth international colloquium on numerikal analysis and computer science with applications, Piovdiv, 2003, 43.

[54] M. L. Marinov, Ts. Rangelov. Pointwise estimates for nonlinear parabolic equations. International workshop "Computer science and education", Borowets, 2005, 69–79.

[55] M. L. Marinov. Existence of solution of the Cauchy problem for semilinear heat equation. *Math. and Education in Math.*, **35** (2006), 180–185.

[56] J. Mozer. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *J. Pure Appl. Math.*, **17** (1964), 101-134.

[57] A. Pankov. G-convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1997.

[59] G. Ponce. Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations. *Nonlinear Anal. Theory, Meth Appl.*, **9** (1985), 5, 399–418.

[60] Y. Qui. The critical exponents of parabolic equations and blow up in $\mathbb{R}^n$. *Acta Math. Appl. Sinica*, (1998), 84–91.

[61] C. Sbordone. La Γ-convergenza e la G-convergenza. *Rend. Sem. mat. Univers. Politech. Torino*, **44** (1982), 2, 25–51.

[62] S. Spagnolo. Convergence in energy for elliptic operators. Proc. Third Symp. Numer. Solut. Partial Diff. Equat. (College Park, 1975), Academic Press, San Diego, 1976, 469–498.

[63] S. Spagnolo. Sur limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (3)*, **21** (1967), 657–699.

[64] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed elliptich. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4)*, **22** (1968), 573–597.

[65] S. Spagnolo. Convergence of parabolic equations. *Bollet. U.M.I.*, **5** (1977), 14-B, 547–568.

[69] F. B. Weissler. Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel J. Math.*, **38** (1981), 29–40.

[71] Qi S. Zhang. A sharp comparison result concerning Schrödinger heat kernels. *Bull. London Math. Soc.*, **35** (2003), 461–472.

[72] С. Антонцев. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. *Доклады АН СССР*, **260** (1981), 1289–1293.

[75] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.

[80] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, Ха Шьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов. *Успехи мат. наук*, **34** (1979), 5, 65–133.

[81] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. О G-сходимости параболических операторов. *Успехи мат. наук*, **36** (1981), 1, 11–58.

[82] В. В. Жиков, С. М. Козлов, А. О. Олейник. Усреднение параболических оператором. *Труды Моск. мат. общ.*, **45** (1982), 182–236.

[83] В. В. Жиков. Вопросы сходимости двойнствености и усреднения для функционалов вариационного исчисления. *Известия АН СССР, сер. мат.*, **47** (1983), 961–999.

[84] В. В. Жиков, С. М. Козлов, А. О. Олейник. Усреднение дифференциальных операторов. М., 1993.

[85] А. Калашников. Задача Коши в классе рьстущих функций для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Вестник МГУ, Серия 1, Мат. и тех.*, **6** (1963), 17–27.

[86] А. Калашников. О задаче Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями. *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **6** (1981), 83–96.

[87] А. Калашников. О разпространении возмущений в первой краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью. *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **8** (1982), 128–134.

[88] А. Калашников. Дифференциальные уравнения и их приложениея. *Успехи мат. наук*, **37** (1982), 6, 273–275.

[89] А. С. Калашников. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. *Успехи мат. наук*, **42** (1987), 2, 135–176.

[91] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.

[92] О. А. Ладыженская, В. А. Солоников, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.

[93] Ж. Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

[94] Ж. Л. Лионс, э. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

[95] В. Г. Мазья. Пространства С. Л. Соболева. Ленинград, 1985.

[96] М. Л. Маринов. Об усреднении одного класса квазилинейных параболических уравнений. *Успехи математических наук*, **40** (1985), 5, 220–220.

[97] М. Л. Маринов. Об усреднении одного уравнения нестационарной фильтрации. *Сердика*, **12** (1986), 381–389.

[98] М. Л. Маринов, Ц. Рангелов. Оценки носителей решений одного класса вырождающихся нелинейных параболических уравнений. *Сердика Математическо Списание*, **12** (1986), 30–37.

[99] М. Л. Маринов. О G-сходимости квазилинейных параболических дифференциальных операторов. *Доклади БАН*, **39** (1986), 5, 19–22.

[100] М. Л. Маринов. О G-сходимости нелинейных параболических операторов и вычислении эффективных коэффициентов. 12 Национална лятна школа “Приложения на математиката в техниката” – Варна 1986 г., **12**, 1987, 1, 202–205.

[101] М. Л. Маринов. О G-сходимости нелинейных параболических операторов I. (Абстрактные параболические операторы). *Сердика*, **14** (1988), 130–140.

[102] М. Л. Маринов. О G-сходимости нелинейных параболических операторов II. (Квазилинейные дифференциальные операторы). *Сердика*, **14** (1988), 141–160.

[103] М. Л. Маринов. Усредняване на нелинейни параболични уравнения. Юбилейна научна конференция, БСУ, 2001, 246–252.

[106] О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **22** (1958), 667–704.

[107] О. А. Олейник, Г. А. Йосифьян, А. С. Шумаев. Математические задачи теории сильно неоднородних упругих сред. М., 1990.

[108] А. А. Панков. Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергетного вида. *Доклады АН СССР*, **278** (1984), 37–41.

[110] У. Е. Райтум. К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами. *Доклады АН СССР*, **261** (1981), 30–34.

[111] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.

[112] Э. Санчес-Паленсия. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.